



**Jiří Horák**  
**Aleš Raidl**

**Hydrodynamická  
stabilita atmosféry  
a nelineární problémy  
geofyzikální  
hydrodynamiky**

## Anotace

Knih je určena zájemcům o mechaniku tekutin a nelineární dynamiku v geofyzikální hydrodynamice. Publikace je mimo jiné zamýšlena jako pokročilý studijní text doplňující studijní materiál k přednáškám „Vybrané partie geofyzikální hydrodynamiky“ a „Vlnové pohyby a energetika atmosféry“ konané na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Některé partie monografie však jistě najdou uplatnění i v kurzu „Dynamické meteorologie“ nebo hydrodynamiky obecně.

Knih seznamuje čtenáře s technikami vyšetření stability hydrodynamického proudění jak v lineárním, tak nelineárním přiblížení (část I.). Druhá část knihy pojednává o obecnějších problémech nelineární geofyzikální hydrodynamiky a netradičních postupech při studiu proudění tekutin. Dodejme, že právě nelineární analýza je perspektivním oborem moderní matematiky, což dobře dokumentuje předkládaná monografie.

Publikace je určena pracovníkům se zaměřením na dynamiku tekutin na univerzitách i ve výzkumných ústavech. Dobře však poslouží i studentům a doktorandům na vysokých školách univerzitního i technického směru, a to i takových oborů jako je fyzika atmosféry nebo matematické a počítačové modelování.

**Recenzovali: prof. RNDr. Jan Bednář, CSc.  
doc. RNDr. Zbyněk Jaňour, DrSc.**

# **Hydrodynamická stabilita atmosféry a nelineární problémy geofyzikální hydrodynamiky**

Jiří Horák<sup>\*)</sup>, Aleš Raidl<sup>+)</sup>

---

<sup>\*)</sup> Ústav fyziky atmosféry AV ČR

<sup>+)</sup> Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, katedra meteorologie a ochrany prostředí

# OBSAH

Předmluva.....	9
<b>ČÁST I</b> .....	<b>11</b>
1 ÚVOD .....	13
2 PERTURBAČNÍ TEORIE .....	16
2.1 Perturbační pohybové rovnice.....	17
3 NORMÁLNÍ MODY.....	21
4 KELVINOVA-HELMHOLTZOVA INSTABILITA, INSTABILITA TAYLOROVA A HELMHOLTZOVA TYPU.....	24
5 PERTURBAČNÍ STAVOVÁ A TERMODYNAMICKÁ ROVNICE.....	34
6 STABILITA VNITŘNÍCH GRAVITAČNÍCH (VZTLAKOVÝCH) VLN .....	38
7 NELINEÁRNÍ ZOBECNĚNÍ METODY ČÁSTICE .....	44
8 KRITICKÉ RICHARDSONOVO ČÍSLO.....	48
8.1 Klasické odvození Milesova-Howardova teorému .....	49
8.2 Odvození Milesova-Howardova teorému na základě energetických úvah a metody částic.....	52
9 STABILITA RAYLEIGHOVY-BÉNARDOVY KONVEKCE.....	57
10 STABILITNÍ KRITÉRIA VYPLÝVAJÍCÍ Z RAYLEIGHOVY ROVNICE .....	72
11 STABILITA FRONTÁLNÍCH VLN.....	81
12 INERČNÍ INSTABILITA .....	96
12.1 Základní mechanismus inerční instability .....	96
12.2 Nelineární zobecnění podmínek inerční instability.....	100
13 SYMETRICKÁ INSTABILITA.....	104
14 BAROTROPNÍ A BAROKLINNÍ INSTABILITA Z HLEDISKA PŘEMĚNY ENERGIE.....	110
15 FORMULACE ROVNIC PRO STUDIUM STABILITY KVAZIGEOSTROFICKÝCH ATMOSFÉRICKÝCH POHYBŮ .....	117
16 NUTNÁ PODMÍNKA BAROTROPNÍ INSTABILITY .....	121
16.1 Příklady možných barotropně instabilních profilů proudění.....	124
16.2 Zobecnění Kuovy nutné podmínky barotropní instability .....	129

17 BAROKLINNÍ INSTABILITA .....	131
17.1 Základní mechanismus baroklinní instability .....	132
17.2 Baroklinní instabilita spojitého modelu na $f$ rovině .....	135
17.3 Baroklinní instabilita v diskretním dvojvrstevnatém modelu .....	154
LITERATURA K ČÁSTI I .....	171
<b>ČÁST II</b> .....	173
1 ÚVOD .....	175
2 O SYSTÉMECH HYDRODYNAMICKÉHO TYPU .....	179
2.1 K definici systémů hydrodynamického typu .....	179
2.2 Ekvivalence tripletu (nejjednoduššího netriviálního systému hydrodynamického typu) a Eulerových diferenciálních rovnic rotace .....	193
2.3 Strukturální vlastnosti kvadraticky nelineárních systémů. Afinní invarianty a kritérium existence kvadratického integrálu v systémech 2. řádu .....	195
2.4 Strukturální vlastnosti kvadraticky nelineárních systémů. Afinní invarianty a kritérium existence kvadratického integrálu v systémech 2. řádu .....	199
2.5 Integrace pohybových rovnic tripletu .....	201
2.6 Asymptotické tvary řešení a kvadratické formy dynamického tripletu vyjádřené pomocí elementárních funkcí .....	206
2.7 K statistickému popisu systémů hydrodynamického typu .....	212
2.8 Komplexifikace systémů hydrodynamického typu. Komplexní triplet v geofyzikální hydrodynamice .....	214
3 O SYMETRIZOVANÝCH NELINEÁRNÍCH SYSTÉMECH .....	221
3.1 Symetrizované systémy a jejich obecné vlastnosti .....	221
3.2 Symetrizované komplexní systémy .....	230
4 SYSTÉMY S DVĚMA KVADRATICKÝMI INTEGRÁLY .....	242
5 KVADRATICKY NELINEÁRNÍ SYSTÉMY SE DVĚMA INTEGRÁLY .....	245
6 POHYBOVÉ ROVNICE $n$ -DIMENZIONÁLNÍHO TUHÉHO TĚLESA A SYMETRIZOVANÉ SYSTÉMY .....	247
7 PRVNÍ INTEGRÁLY SYSTÉMU EULEROVÝCH ROVNIC .....	249
8 SIMPLEKTICKÁ STRUKTURA NA ORBITÁCH, INVOLUCE INTEGRÁLŮ A ÚPLNÁ INTEGRABILITA SYSTÉMU EULEROVÝCH ROVNIC .....	252
9 POHYBOVÉ ROVNICE ZOBECNĚNÉHO TUHÉHO TĚLESA A JEJICH VZTAH S ROVNICEMI HYDRODYNAMIKY .....	256
10 POHYBOVÉ ROVNICE $n$ -DIMENZIONÁLNÍHO TĚŽKÉHO SETRVAČNÍKU .....	264
11 INTEGRACE KOMPLEXNÍ ANALOGIE POHYBOVÝCH ROVNIC $n$ -DIMENZIONÁLNÍHO TĚŽKÉHO TĚLESA .....	267
12 GEODETIKY NA RIEMANNOVÝCH VARIETÁCH .....	274
13 SOUVISLOSTI S NELINEÁRNÍMI SYSTÉMY MECHANIKY TEKUTIN .....	279
13.1 Adjungované rovnice systémů hydrodynamického typu .....	279
13.2 K problému uzavírání řetězce rovnic pro momenty trojdimenzionálního systému Navierových-Stokesových rovnic při velkých Reynoldsových číslech .....	286
13.3 Arnoldova konstrukce zobecněného tuhého tělesa .....	292
13.4 Kelvinův (Thomsonův) teorém a Moffatův hydrodynamický invariant .....	295
13.5 Zobecněné tuhé těleso a dynamika globálních barotropních a baroklinních toků v geofyzikální hydrodynamice .....	307
13.6 Diferenciální formy .....	327

13.7	Teorém Noetherové.....	332
13.8	Simplektická struktura na orbitách koadjungované reprezentace a levoinvariantní metriky .....	334
13.9	Liouvilleův teorém a Hamiltonovy systémy .....	336
13.10	Hamiltonův formalismus na Lieových grupách .....	338
13.11	Matematické úlohy dynamiky stratifikované tekutiny .....	343
13.12	Tichonovovy systémy. Pomalá a rychlá dynamika .....	372
	ZÁVĚREČNÉ POZNÁMKY .....	374
	LITERATURA K ČÁSTI II .....	378

# PŘEDMLUVA

Knih je určena především posluchačům meteorologie a klimatologie na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Publikace je mimo jiné zamýšlena jako pokročilý studijní materiál k přednášce „Vybrané partie geofyzikální hydrodynamiky“ určené pro poslední ročník magisterského studia, popřípadě doktorského studia meteorologie a klimatologie. Některé partie monografie však jistě najdou uplatnění i v kurzu „Dynamické meteorologie“ nebo hydrodynamiky obecně. Záměrem autorů je seznámit studenty uvedené specializace a případně další zájemce s lineární analýzou stability atmosférických procesů, s obecnějšími problémy nelineární geofyzikální hydrodynamiky a s netradičními postupy při studiu proudění tekutin, s nimiž se zájemci mohou setkat v soudobé literatuře. Těmito postupy rozumíme matematické struktury respektující současný stav lineární a nelineární analýzy, ve druhém případě velkou měrou přihlížející k algebraickým metodám. Právě nelineární analýza reprezentuje jeden z perspektivních oborů matematiky a její zaměření na fyzikální disciplíny se výrazně projevuje v poslední době i při matematickém modelování v dynamice tekutin. To však neznamená, že některé jejich problémy nelze řešit lineární analýzou. Svědčí o tom prvá část předkládané monografie, která jako celek tématicky navazuje na díla o deterministickém chaosu, vydaná nakladatelstvím Academia v letech 1990, 1996 a 2003. S tím souvisí jak výběr látky, tak i metody výkladu. Další informace o celkovém zaměření monografie nalezne zájemce v úvodních kapitolách.

Z matematických prostředků předpokládáme u čtenáře znalost základů diferenciálního a integrálního počtu, diferenciální geometrie a vektorové analýzy. S použitím náročnějších partií matematiky se čtenář setká v částech zaměřených na nelineární systémy hydrodynamiky, reprezentovanými konečnědimenzionálními aproximacemi výchozích parciálních diferenciálních rovnic – evolučních rovnic dynamiky atmosféry. Jejich součástí je i teorie



grup a její speciální oblast, teorie reprezentací. Snažili jsme se, aby kniha, pokud je to možné, tvořila uzavřený celek a nenutila čtenáře sáhnout k doplňující matematické literatuře. Zájemcům, kteří chtějí hlouběji proniknout do matematického modelování atmosférických pohybů kvadraticky nelineárními systémy hydrodynamického typu, doporučujeme ke studiu kapitoly 7 a 8 z knihy J. Horáka, L. Krlína a A. Raidla „Deterministický chaos a jeho fyzikální aplikace“ (Academia, Praha 2003), zaměřené na matematické modely klimatu a na nelineární analýzu chaotických časových řad. Samotné matematické klimatu je věnováno dílo „Matematické modelování v problémech klimatu“, které vyšla tamtéž v roce 2006.

O autorství knihy se autoři podělili takto: Jiří Horák sepsal druhou část (II.) a Aleš Raidl je autorem první části (I.).

Ještě je třeba učinit poznámku o odkazování na rovnice. Protože se prakticky v části I. neodkazujeme na rovnice z části II. a obráceně, jsou rovnice v obou částech (pro zkrácení) číslovány odděleně.

Autoři vyjadřují vděčnost prof. RNDr. Janu Bednářovi, CSc. za péči a úsilí, které věnoval tomu, aby publikace spatřila světlo světa. Za nakreslení některých obrázků z první části knihy a všech obrázků z její druhé části autoři děkují kolegovi RNDr. Jirímu Mikšovskému, Ph.D. Dík patří rovněž manželce druhého z autorů (A. R.) PhDr. Marině Raidlové za pečlivé přepsání a převedení do elektronické podoby celé druhé části knihy. Speciální poděkování patří doc. RNDr. Otakaru Zikmundovi, CSc. – jeho podrobné přečtení rukopisu a navržené úpravy přispěly k odbornému i jazykovému zpřesnění textu.

*Autoři*

# ČÁST I



# 1 ÚVOD

První část knihy pojednává o hydrodynamické stabilitě, respektive instabilitě, neboť právě instabilní proudění se bude těšit našemu zvýšenému zájmu. Výběr látky byl uspořádán tak, aby podával určitý přehled o stabilitě atmosférického proudění různých měřítek. Výklad začínáme kapitolou o perturbanční metodě a poruchách vlnového charakteru, které hrají ústřední roli v celé první polovině monografie. Další význačnou úlohu při výkladu představuje různým způsobem modifikovaná metoda vzduchové částice, kterou vychylujeme z její rovnovážné polohy několika způsoby, a to vertikálně, horizontálně nebo šikmo. Ačkoliv stabilitu atmosféry zkoumáme povětšinou na základě linearizovaných rovnic, v některých případech provádíme i zobecnění na nelineární situace.

Výklad postupuje od zkoumání stability atmosférických pohybů menších měřítek, jaké představuje například Kelvinova-Helmholtzova instabilita, přes popis Rayleighovy-Bénardovy konvekce následovaný rozbořením instability mezoměřítko (symetrická a částečně inerční instabilita), až po problematiku stability kvazigeostrofických pohybů synoptického měřítko – konkrétně výkladem o barotropní a zejména baroklinní instabilitě. Do publikace jsme zařadili také některé části, které tvoří dnes již klasické partie teorie hydrodynamické stability, například Milesův-Howardův teorém, polokruhový teorém a Rayleighův, popřípadě Fjørtoftův teorém.

U čtenáře první části knihy se všeobecně předpokládá znalost základů hydrodynamiky, které lze získat z výborných monografií Batchelora [1] a Landaua, Lifsitze [2], a dále vědomostí z oblasti proudění vzduchu v atmosféře, tzn. z dynamické meteorologie. V tomto směru jako zdroj informací dobře poslouží Holtonova kniha [3], Duttonova monografie [4], z česky psané odborné literatury také příručka Pechaly a Bednáře [5].

Omezený prostor, který pro výklad problematiky máme, nám neumožnil zařadit řadu zajímavých statí o hydrodynamické stabilitě. Máme zde na

mysli zejména kapitoly o nelineárních interakcích mezi základním stavem a perturbacemi. Rovněž, až na výjimku představovanou Rayleighovou-Bénardovou konvekcí, neuvažujeme disipaci. Samostatnou kapitolu by si jistě vyžádalo i studium barotropní stability Rossbyho vln. Potřebné informace v tomto směru jistě čtenář nalezne v monografiích (seřazeno chronologicky) Lina [6], Chandrasekhara [7], Drazina a Reida [8], popřípadě Gonrèche a Manneville [9]. Z hlediska geofyzikální hydrodynamiky lze zájemcům doporučit vynikající knihu Pedloskeho [10].

Co je vlastně předmětem zájmu teorie hydrodynamické stability? Tato teorie studuje stabilitu určitého základního, chcete-li výchozího stavu, vůči poruchám různého charakteru, které na tento základní stav působí. Poruchy nebo-li perturbace mohou díky stabilitě základního stavu zanikat, nebo naopak v instabilním případě s časem sílit. Velmi často uvažujeme, že perturbace mají na počátku infinitezimální charakter. Jejich případné zvětšování však může představovat spouštěcí mechanismus, kdy kupříkladu ustálené laminární proudění přejde v neuspořádané, chaotické proudění – turbulenci. Poněkud zjednodušeně a s jistou dávkou nadsázky lze říci, že projevy počasí spočívají v nestabilitě atmosférické cirkulace – například podle moderních představ soudobé dynamické meteorologie vznikají synoptické poruchy ve středních zeměpisných šířkách díky baroklinní instabilitě původně zonálního západního proudění. Prostřednictvím baroklinní instability tak může dojít k přestavbě zonální atmosférické cirkulace v cyklonální.

Studium vzájemného působení fluktuací a základního stavu se rozpadá na dva zásadní problémy. Na určení základního stavu osvobozeného od fluktuací a na popis evoluce poruch (fluktuací). Druhým úkolem se budeme vesměs zabývat v následujících kapitolách, kdy odvodíme rovnice pro perturbace a tyto poruchy budeme povětšinou uvažovat ve tvaru vln. Proto se nyní zastavme u problematiky stanovení základního stavu. To není při studiu pohybů v atmosféře tak jednoduché, jak by se na první pohled mohlo zdát. Mohlo by nás napadnout, že takový základní stav by bylo možné získat časovým průměrováním proudění přes dostatečně dlouhý časový interval; podobný postup se vskutku používá například při studiu turbulence. Je užitečné si však uvědomit, že takto získaný jakýsi střední základní stav již obsahuje a je ovlivněn fluktuacemi, od kterých bychom jej chtěli oprostit. Fluktuace totiž mohou vést ke vznikům toků tepla a hybnosti s obecně nenulovými časovými průměry. Časově vystředované proudění tak zahrnuje i existující fluktuace. Jak v této souvislosti poznamenává Pedlosky [10], časově průměrované proudění se obvykle jeví stabilnější než skutečný stav bez fluktuací. Neznalost základního stavu nás tedy nutí k jeho definování. Musí to být však definice dostatečně smysluplná. V atmosféře obvy-

kle předpokládáme, že základní stav je tvořen zonálním geostrofickým prouděním. To dobře odpovídá podmínkám, když studujeme stabilitu pohybů velkého měřítka. V práci se snažíme nalézt jistý kompromis mezi tím, aby na jedné straně byl základní stav atmosféry dostatečně jednoduchý a mohli jsme získané rovnice řešit bez použití metod numerické matematiky, a na druhé straně dosti složitý na to, aby výsledný model popisoval vlastnosti atmosféry dostatečně věrně. Naštěstí se ukazuje, jak uvidíme z dalšího výkladu, že i poměrně jednoduchá konfigurace základního stavu, například při studiu baroklinní instability, uspokojivě postihuje řadu skutečných rysů zemské atmosféry.

## 2 PERTURBAČNÍ TEORIE

Úlohy dynamické meteorologie a geofyzikální hydrodynamiky vůbec jsou spojeny s nutností řešit soustavu hydrodynamických rovnic, tj. tří pohybových rovnic, rovnice kontinuity, stavové rovnice a první hlavní věty termodynamické. Zmíněnou soustavu lze psát v mnoha tvarech, z nichž jedním z možných je tento:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\alpha \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{g} + \mathbf{f}_r, \quad (2.1a)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \alpha = \alpha \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (2.1b)$$

$$p\alpha = RT, \quad (2.1c)$$

$$\frac{dq}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt}. \quad (2.1d)$$

Souřadnicovou soustavu  $O(x,y,z)$  volíme pravotočivou, obvykle pevně spojenou s rotující Zemí tak, že osa  $x$  míří k východu, osa  $y$  na sever a osa  $z$  kolmo vzhůru. Čas značíme  $t$ ,  $\mathbf{v}$  se složkami  $(u, v, w)$  představuje rychlost proudění,  $p$  je tlak,  $\boldsymbol{\Omega} (0, \Omega \cos \varphi, \Omega \sin \varphi)$  je úhlová rychlost rotace Země, kterou v dostatečně přesném přiblížení považujeme za konstantní ( $\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ,  $\varphi$  je zeměpisná šířka). Tíhové zrychlení Země je reprezentováno vektorem  $\mathbf{g} (0, 0, -g)$  a  $\mathbf{f}_r$  značí sílu tření. Veličina  $\alpha$  představuje měrný objem, související s hustotou  $\rho$  vztahem  $\alpha = 1/\rho$ ,  $R$  je měrná plynová konstanta,  $T$  teplota a  $q$  je teplo vztažené na jednotku hmoty dodané, nebo odebrané studované soustavě. Na tomto místě poznamenejme, že v případě nutnosti, pracujeme-li například s oceánem, je nutné soustavu hydrodynamických rovnic obohatit o další rovnice, typicky o rovnici salinity (slanosti) a vhodným způsobem upravit i stavovou rovnici; viz např. [11].

Analytické řešení soustavy (2.1) není v obecném případě známo, zejména díky existenci nelineárních členů. Její řešení tedy musíme hledat buď pomocí numerické integrace, nebo přistoupit k zavedení zjednodušujících předpokladů. Vhodnou metodou, která zjednodušuje výchozí rovnice, je perturbační teorie. Spočívá v tom, že studované proudění považujeme za součet dvou toků (proudění): základního stavu osvobozeného od fluktuací, a malých poruch (perturbací). Přitom předpokládáme, že

- 1) základní stav splňuje soustavu rovnic (2.1),
- 2) výsledné proudění (základní stav + pertubace) splňuje soustavu rovnic (2.1).

Předpokládáme-li navíc, že

- 3) poruchové (perturbační) veličiny jsou řádově menší než jim odpovídající veličiny popisující základní stav, hovoříme o *lineární perturbační metodě*.

Hydrodynamické rovnice napsané pro výsledný stav zjednodušíme pomocí rovnic (2.1), napsaných pro základní proudění, jejich vzájemným odečtením. Předpoklad 3) nám pak navíc umožňuje zanedbat v rovnicích členy, které jsou nelineární vzhledem k poruchám. Získáme tak rovnice popisující chování poruch. Tyto rovnice pak nazýváme perturbačními rovnicemi.

## 2.1 Perturbační pohybové rovnice

Pro ilustraci nyní odvodíme perturbační pohybové rovnice. Veličiny vztahující se k základnímu stavu označíme pruhem, tzn.  $\bar{\mathbf{v}}$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{p}$ . Poruchové veličiny označíme svíslou čárkou, tzn.  $\mathbf{v}'$ ,  $\alpha'$ ,  $p'$  reprezentují postupně pertubace v poli rychlosti proudění, měrného objemu a tlaku. Zopakujme znovu pro přehlednost, že

- základní stav je dán veličinami  $\bar{\mathbf{v}}$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{p}$ ,
- výsledný stav je dán veličinami  $\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$ ,  $\bar{\alpha} + \alpha'$ ,  $\bar{p} + p'$ .

Pochopitelně vezmeme-li v úvahu i rovnice (2.1c) a (2.1d), jsme nuceni uvažovat i případné poruchy v poli teploty atd., ale v tomto ilustrativním případě, kdy používáme pouze pohybové rovnice, vystačíme s poruchami v poli rychlosti, měrného objemu a tlaku. Podle předpokladu 1) platí pohybová rovnice pro základní stav, tedy

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} = -\bar{\alpha} \nabla \bar{p} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{g},$$



kde jsme pro jednoduchost zanedbali tření. Podle předpokladu 2) platí pohybová rovnice (2.1a) i pro výsledný stav, tzn.

$$\frac{\partial(\bar{\mathbf{v}}+\mathbf{v}')}{\partial t} + ((\bar{\mathbf{v}}+\mathbf{v}') \cdot \nabla)(\bar{\mathbf{v}}+\mathbf{v}') = -(\bar{\alpha}+\alpha')\nabla(\bar{p}+p') - 2\boldsymbol{\Omega} \times (\bar{\mathbf{v}}+\mathbf{v}') + \mathbf{g}.$$

Odečteme-li od poslední rovnice rovnici předposlední, získáme

$$\frac{\partial\mathbf{v}'}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \cdot \nabla)\bar{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla)\mathbf{v}' = -\bar{\alpha}\nabla p' - \alpha'\nabla\bar{p} - \alpha'\nabla p' - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'.$$

Uvážíme-li i předpoklad 3), můžeme členy, které jsou nelineární vzhledem k poruchám zanedbat, protože jsou co do velikosti alespoň o řád menší než členy zbývající. V takovém případě dostáváme

$$\frac{\partial\mathbf{v}'}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \cdot \nabla)\bar{\mathbf{v}} = -\bar{\alpha}\nabla p' - \alpha'\nabla\bar{p} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}',$$

což je hledaná lineární perturbační pohybová rovnice. Analogicky postupujeme i při odvozování perturbační rovnice kontinuity, stavové rovnice i první hlavní věty termodynamické. Ještě poznamenejme, že místo měrného objemu  $\alpha$  bývá obvyklejší používat v pohybových rovnicích hustotu  $\rho = 1/\alpha$  tak, jak to budeme činit později.

Lineární perturbační metoda představuje jisté omezení v tom smyslu, že umožňuje studium stability základního proudění, které je vystaveno pouze malým (v podstatě nekonečně malým) poruchám. Selhává však v případě, kdy amplitudy poruch narostou po určité době v důsledku instability do takových velikostí, že již není možno nelineární členy v rovnicích opomenout. Podobně, je-li základní proudění stabilní vzhledem k nekonečně malým poruchám, nedává lineární perturbační metoda žádné informace o tom, je-li toto proudění stabilní i vzhledem k poruchám dostatečně velkým. Přesto je možné, jak uvidíme později, pomocí lineární teorie popsat některé vlastnosti fluktuací v reálné atmosféře, například délku dominantní vlnové poruchy nebo její vertikální strukturu. Poznamenejme ještě, že lineární perturbační metoda je v dynamické meteorologii spojena zejména s Bjerknesovým jménem (viz například [12]).

Aplikujme nyní výše popsanou lineární perturbační metodu na proudění ve vertikální rovině  $(x, z)$ . Pro jednoduchost neuvažujme rotaci Země a atmosféru považujme za nestlačitelnou tekutinu. Není-li dále explicitně uvedeno jinak, neuvažujeme ani síly tření. Základní stav definujeme následovně:  $\bar{u}(z)$ ,  $\bar{w} = 0$ ,  $\bar{p}(z)$ ,  $\bar{\rho}(z)$ . Pro takové základní proudění mají pohybové rovnice v rovině  $(x, z)$  tvar

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0, \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho} g. \quad (2.2b)$$

Rovnice kontinuity pro základní stav je splněna identicky. Poruchy v poli rychlosti ve směru osy  $x$  a  $z$  necht' jsou  $u'(x, z, t)$ ,  $w'(x, z, t)$ , v poli tlaku  $p'(x, z, t)$  a poli v hustoty  $\rho'(x, z, t)$ . Výsledný stav má tedy tvar  $\bar{u}(z) + u'(x, z, t)$ ,  $w'(x, z, t)$ ,  $\bar{p}(z) + p'(x, z, t)$ ,  $\bar{\rho}(z) + \rho'(x, z, t)$ . Podle předpokladu 2) perturbační metody můžeme psát

$$(\bar{\rho} + \rho') \left[ \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + w' \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial z} \right] = -\frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x}, \quad (2.3a)$$

$$(\bar{\rho} + \rho') \left[ \frac{\partial w'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial w'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} \right] = -\frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial z} - g(\bar{\rho} + \rho'), \quad (2.3b)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial x} + w' \frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial z} = 0. \quad (2.3c)$$

V této soustavě rovnic zanedbáme nelineární členy vzhledem k poruchám a odečteme od každé z rovnic (2.3) odpovídající rovnici (2.2). Tímto postupem dostáváme následující perturbační rovnice

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{d\bar{u}}{dz} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} g, \quad (2.4b)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w' \frac{d\bar{\rho}}{dz} = 0. \quad (2.4c)$$

Není obtížné se přesvědčit, že rovnici kontinuity pro perturbace je možné rovněž psát ve tvaru:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \quad (2.4d)$$

Zaveďme dále proudovou funkci  $\psi$  vztahy

$$u' = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w' = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.5)$$

Tím rovnice (2.4a) až (2.4c) přejdou na tvar

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} + \bar{u} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (2.6a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} + \bar{u} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} g, \quad (2.6b)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{d\bar{\rho}}{dz} = 0. \quad (2.6c)$$

Rovnici (2.6b) parciálně derivujme podle  $x$  a odečtěme ji od rovnice (1.6a) parciálně derivované podle  $z$ . Tím dostaneme

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left( \nabla^2 \psi + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dz} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \left( \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dz} \frac{d\bar{u}}{dz} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{g}{\bar{\rho}} \frac{\partial \rho'}{\partial x}. \quad (2.7)$$

Derivujme rovnici (2.6c) parciálně podle  $x$ , dělme ji  $\bar{\rho}$  a vyjádřeme z ní  $(1/\bar{\rho})(\partial \rho' / \partial x)$ . Výsledek pak dosadíme do rovnice (2.7). Poté dostáváme

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \left( \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta \right) + \left( \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} - \frac{d\bar{u}}{dz} \delta \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = g \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \delta, \quad (2.8)$$

kde jsme označili

$$\delta \equiv -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dz}.$$

Tím jsme převedli řešení soustavy perturbačních rovnic (2.4) pro neznámé  $u'$ ,  $w'$ ,  $\rho'$  a  $p'$  na řešení jedné diferenciální rovnice pro proudovou funkci  $\psi$ . K rovnici (2.8) (stejně jako k soustavě (2.1) resp. (2.4)) je třeba přidat vhodné okrajové, popřípadě počáteční podmínky, jak provedeme později.

### 3 NORMÁLNÍ MODY

Vhodnou metodou řešení rovnice (2.8) je metoda normálních modů. Protože koeficienty v rovnici (2.8) nezávisí ani na čase  $t$  ani na souřadnici  $x$ , její řešení hledáme ve tvaru

$$\psi(x, z, t) = \Re \left\{ \hat{\psi}(z) e^{ik(x-ct)} \right\}, \quad (3.1)$$

kde  $\Re$  značí reálnou část výrazu, před kterým stojí. Vlnové číslo  $k \geq 0$  ve směru osy  $x$  musí být reálné, aby amplituda vlny (modu) byla při velkých  $x$  konečná. Amplitudová funkce  $\hat{\psi}$  a růstový faktor (rychlost růstu)  $kc_i$  mohou být komplexní ( $c_i$  značí imaginární část fázové rychlosti  $c$ ). Zapišeme-li fázovou rychlost  $c$  jako součet reálné a imaginární části

$$c = c_r + ic_i \quad (3.2)$$

a dosadíme-li toto vyjádření do (3.1), máme

$$\psi(x, z, t) = \Re \left\{ \hat{\psi}(z) e^{kc_i t} e^{ik(x-c_r t)} \right\}. \quad (3.3)$$

Je-li  $kc_i=0$ , pak se amplituda poruchy s časem nemění, tzn. je stabilní. Je-li  $kc_i < 0$ , pak porucha s časem slábne. Naopak, je-li  $kc_i > 0$ , pak porucha s časem zesiluje. V posledních dvou případech říkáme, že je porucha instabilní. Na tomto místě je však třeba poznamenat, že někteří autoři, například [13], zavádí pojem stability (instability) poněkud odlišně, a to:  $kc_i = 0$  – neutrální porucha,  $kc_i < 0$  – stabilní porucha,  $kc_i > 0$  – instabilní porucha. My se budeme vždy snažit o explicitní rozlišení, aby bylo zřejmé, o jaký časový vývoj poruchu se jedná.

V dalším textu budeme písmeno  $\Re$  vynechávat a budeme mít na paměti, že fyzikální význam mají jen reálné části výrazů (3.1), (3.3), respektive jejich analogie.

Všimněme si, že při  $kc_i > 0$  se může porucha stát po uplynutí dostatečně dlouhé doby natolik velká, že se nelineární efekty stanou natolik významnými, že lineární přístup pozbyde platnosti. Proto je vhodné metodu normálních modů používat, v souladu s lineární perturbací teorií, jen na počáteční stadia vývoje poruch.

Dosazením (3.1) do rovnice (2.8) dostáváme

$$(\bar{u} - c)^2 \left( \frac{d^2 \hat{\psi}}{dz^2} - k^2 \hat{\psi} - \frac{d\hat{\psi}}{dz} \delta \right) - (\bar{u} - c) \left( \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} - \frac{d\bar{u}}{dz} \delta \right) \hat{\psi} = -g\delta \hat{\psi}, \quad (3.4)$$

což je již „jen“ obyčejná diferenciální rovnice pro amplitudovou funkci  $\hat{\psi}$ .

Rovnice (3.4) je velmi důležitá nejen proto, že jí budeme studovat v dalším textu, ale i pro to, že z ní vyplývají další vztahy, které hrají důležitou úlohu v teorii hydrodynamické stability. Předně, uvážíme-li, že se hustota  $\bar{\rho}(z)$  mění s výškou obvykle mnohem pomaleji než rychlost proudění  $\bar{u}(z)$ , a že  $\delta \ll 1$ , můžeme v poslední rovnici zanedbat ty členy obsahující  $\delta$ , které se nacházejí na její levé straně, a ponechat pouze ten člen s  $\delta$ , který stojí na pravé straně rovnice (3.4). Fyzikálně to znamená, že zanedbáváme změny hustoty u členů postihujících setrvačnost, ale ponecháváme u členu, který popisuje archimédovský vztlak. Taková situace se velmi podobá Boussinesquově aproximaci [8]. Po naznačené úpravě přejde (3.4) na tvar

$$(\bar{u} - c) \left( \frac{d^2 \hat{\psi}}{dz^2} - k^2 \hat{\psi} \right) - \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} \hat{\psi} + \frac{g\delta}{(\bar{u} - c)} \hat{\psi} = 0, \quad (3.5)$$

který nazýváme *Taylorova-Goldsteinova rovnice*.

Půjdeme-li ještě dále a nebudeme-li uvažovat změny hustoty vůbec (budeme pracovat například s homogenní tekutinou), redukuje se rovnice (3.4), popřípadě (3.5), na rovnici

$$(\bar{u} - c) \left( \frac{d^2 \hat{\psi}}{dz^2} - k^2 \hat{\psi} \right) - \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} \hat{\psi} = 0, \quad (3.6)$$

o které hovoříme jako o *Rayleighově rovnici*. Pro dvě posledně jmenované rovnice byla odvozena řada teorémů, které se váží ke stabilitě různých typů proudění. Některé si v následujícím textu uvedeme.

Závěrem tohoto oddílu si ještě povšimněme, že jsme poruchy (3.1) popřípadě (3.3) uvažovali dvourozměrné, nezávislé na souřadnici  $y$ . K tomu nás vede tvrzení *Squireova teorému*, podle kterého v homogenní tekutině

existuje ke každé instabilní trojrozměrné vlně vždy vlna dvojrozměrná, která je instabilnější a která se pohybuje rovnoběžně se směrem proudění. Na případ stratifikované tekutiny Squireův teorém zobecnil Yih (bližší podrobnosti viz [14]). Předmětem našeho prioritního zájmu jsou právě módy (vlny) co možná nejinstabilnější, nehledě na to, že uvažování dvojrozměrných namísto trojrozměrných poruch výpočty poněkud zjednoduší.

## 4 KELVINOVA-HELMHOLTZOVA INSTABILITA, INSTABILITA TAYLOROVA A HELMHOLTZOVA TYPU

V této kapitole se budeme zabývat řešením rovnice (3.4) za jistých zjednodušujících předpokladů. Ukážeme jaký vliv má na stabilitu proudění rozložení hustoty, vertikální střih větru (vertikální gradient rychlosti proudění) a tloušťka vrstvy, ve které tekutina proudí.

Uvažujme dvě nad sebou ležící vrstvy dvou nestlačitelných tekutin, které se navzájem nemísí, s hustotami  $\rho_1, \rho_2$  a konstantními rychlostmi základního proudění  $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ . Zanedbáme-li zemskou rotaci, je plocha oddělující obě tekutiny v klidovém stavu horizontální. Umístíme do této roviny počátek pravoúhlé souřadnicové soustavy. Osa  $x$  nechť je orientována ve směru proudění obou tekutin a osa  $z$  nechť míří kolmo vzhůru. Dále označme všechny veličiny vztahující se k horní tekutině indexem 1, k dolní tekutině indexem 2. Nechť je horní tekutina omezena neprostupnou horizontální rovinou ve výšce  $z = h_1$  a podobně dolní tekutina nechť je ohraničena rovinou ve výšce  $z = -h_2$ .

Na základní stav charakterizovaný veličinami  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{p}_1(z), \bar{p}_2(z), \rho_1, \rho_2$  nechť jsou superponovány poruchy v poli rychlosti proudění a tlaku:  $u'_1(x, z, t), u'_2(x, z, t), w'_1(x, z, t), w'_2(x, z, t), p'_1(x, z, t), p'_2(x, z, t)$ . Výsledný stav tedy můžeme charakterizovat takto:

- horní tekutina:  $\bar{u}_1 + u'_1(x, z, t), w'_1(x, z, t), \bar{p}_1(z) + p'_1(x, z, t), \rho_1,$
- spodní tekutina:  $\bar{u}_2 + u'_2(x, z, t), w'_2(x, z, t), \bar{p}_2(z) + p'_2(x, z, t), \rho_2.$

Perturbace v poli rychlosti proudění můžeme nahradit perturbačními proudovými funkcemi  $\psi_1, \psi_2$  podle vztahu (2.5). Namísto pohybových rovnic a rovnice kontinuity je pak možno použít rovnice typu (3.4). To znamená, že

$$(\bar{u}_1 - c) \left( \frac{d^2 \hat{\psi}_1}{dz^2} - k^2 \hat{\psi}_1 \right) = 0, \quad \psi_1 = \hat{\psi}_1 e^{ik(x-ct)}, \quad (4.1a)$$

$$(\bar{u}_2 - c) \left( \frac{d^2 \hat{\psi}_2}{dz^2} - k^2 \hat{\psi}_2 \right) = 0, \quad \psi_2 = \hat{\psi}_2 e^{ik(x-ct)}. \quad (4.1b)$$

Předpokládáme-li, že  $\bar{u}_1 \neq c$ ,  $\bar{u}_2 \neq c$ , můžeme řešení rovnic (4.1) psát ve tvaru

$$\hat{\psi}_1 = A_1 e^{kz} + B_1 e^{-kz}, \quad (4.2a)$$

$$\hat{\psi}_2 = A_2 e^{kz} + B_2 e^{-kz}, \quad (4.2b)$$

Kde  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  jsou integrační konstanty, které určíme z okrajových podmínek. Kinematická okrajová podmínka na horní hranici vrchní tekutiny vyžaduje, aby normálová složka rychlosti k neprostupné hranici byla rovna nule, to znamená

$$\hat{\psi}_1(z = h_1) = A_1 e^{kh_1} + B_1 e^{-kh_1} = 0. \quad (4.3a)$$

Označme tedy

$$A_1 e^{kh_1} = -B_1 e^{-kh_1} \equiv \frac{C_1}{2},$$

kde  $C_1$  je nová konstanta. Dosazením poslední rovnice do (4.2a) máme

$$\hat{\psi}_1(z) = C_1 \sinh[k(z - h_1)]. \quad (4.4a)$$

Zcela analogicky aplikujeme kinematickou okrajovou podmínku na dolní hranici spodní vrstvy tekutiny, tedy

$$\hat{\psi}_2(z = -h_2) = A_2 e^{-kh_2} + B_2 e^{kh_2} = 0. \quad (4.3b)$$

Označme

$$A_2 e^{-kh_2} = -B_2 e^{kh_2} \equiv \frac{C_2}{2},$$

kde  $C_2$  je konstanta. Dosazením poslední rovnice do (4.2b) máme

$$\hat{\psi}_2(z) = C_2 \sinh[k(z + h_2)]. \quad (4.4b)$$

Abychom mohli formulovat dynamické okrajové podmínky na rozhraní obou tekutin, určíme poruchy  $p'_1$ ,  $p'_2$  v tlakovém poli. Z rovnice (2.6a) vyplývá po dosazení pomocí (2.5), že



$$ik^2 \rho_1 (\bar{u}_1 - c) C_1 \cosh [k(z - h_1)] e^{ik(x-ct)} = \frac{\partial p'_1}{\partial x}, \quad (4.5a)$$

$$ik^2 \rho_2 (\bar{u}_2 - c) C_2 \cosh [k(z + h_2)] e^{ik(x-ct)} = \frac{\partial p'_2}{\partial x}. \quad (4.5b)$$

Podobně z rovnice (2.6b) máme

$$k^2 \rho_1 (\bar{u}_1 - c) C_1 \sinh [k(z - h_1)] e^{ik(x-ct)} = \frac{\partial p'_1}{\partial z}, \quad (4.6a)$$

$$k^2 \rho_2 (\bar{u}_2 - c) C_2 \sinh [k(z + h_2)] e^{ik(x-ct)} = \frac{\partial p'_2}{\partial z}. \quad (4.6b)$$

Integrujme rovnice (4.6) podle souřadnice  $z$ :

$$p'_1 = k \rho_1 (\bar{u}_1 - c) \cosh [k(z - h_1)] e^{ik(x-ct)} + f_1(x), \quad (4.7a)$$

$$p'_2 = k \rho_2 (\bar{u}_2 - c) \cosh [k(z + h_2)] e^{ik(x-ct)} + f_2(x), \quad (4.7b)$$

kde  $f_1(x)$  a  $f_2(x)$  jsou integrační funkce. Parciálním derivováním rovnic (4.7) podle  $x$  a následným porovnáním s rovnicemi (4.5) zjistíme, že

$$f_1(x) = D_1, \quad f_2(x) = D_2$$

a  $D_1$  a  $D_2$  jsou integrační konstanty. Pro jednoduchost je volme rovny nule, tedy

$$p'_1 = k \rho_1 (\bar{u}_1 - c) \cosh [k(z - h_1)] e^{ik(x-ct)}, \quad (4.8a)$$

$$p'_2 = k \rho_2 (\bar{u}_2 - c) \cosh [k(z + h_2)] e^{ik(x-ct)}. \quad (4.8b)$$

Pro přehlednost ještě uveďme tvar poruch v poli rychlosti proudění:

$$u'_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial z} = -k C_1 \cosh [k(z - h_1)] e^{ik(x-ct)}, \quad (4.9a)$$

$$u'_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial z} = -k C_2 \cosh [k(z + h_2)] e^{ik(x-ct)}, \quad (4.9b)$$

$$w'_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = ik C_1 \sinh [k(z - h_1)] e^{ik(x-ct)}, \quad (4.10a)$$

$$w'_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = ik C_2 \sinh [k(z + h_2)] e^{ik(x-ct)}. \quad (4.10b)$$

Dynamická okrajová podmínka na rozhraní mezi tekutinami vyžaduje spojitost tlaku při přechodu přes toto rozhraní. Předpokládáme-li, že částice,

kteře spočívají na tomto rozhraní, na něm budou setrávat, je možné psát zmíněnou dynamickou okrajovou podmínku následovně

$$\frac{d}{dt}[(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) + (p'_1 - p'_2)]_{\text{rozhraní}} = 0. \quad (4.11)$$

Podmínka je sice definována pro rozhraní, ale uvážíme-li, že se zabýváme lineární teorií, ve které považujeme poruchy za daleko menší než veličiny základního stavu, lze předpokládat, že odchylka rozhraní od jeho klidové polohy je nevelká. Podmínku (4.11) proto můžeme vztáhnout k rozhraní v poloze  $z = 0$ . Tedy

$$\frac{d}{dt}[(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) + (p'_1 - p'_2)]_{z=0} = 0. \quad (4.12)$$

Poslední výraz představuje dvě rovnice (pro dolní a horní tekutinu), které po provedení Eulerova rozvoje  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$  a zanedbání nelineárních členů, mají tvar

$$\left[ \frac{\partial(p'_1 - p'_2)}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial(p'_1 - p'_2)}{\partial x} + w'_1 g(\rho_2 - \rho_1) \right]_{z=0}, \quad (4.13a)$$

$$\left[ \frac{\partial(p'_1 - p'_2)}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial(p'_1 - p'_2)}{\partial x} + w'_2 g(\rho_2 - \rho_1) \right]_{z=0}, \quad (4.13b)$$

kde jsme využili rovnice hydrostatické rovnováhy.

Dosadíme-li nyní do rovnic (4.13) pomocí (4.8) a (4.10) obdržíme

$$\begin{aligned} C_1 [k\rho_1(\bar{u}_1 - c)^2 \cosh(kh_1) - g(\rho_2 - \rho_1)\sinh(kh_1)] = \\ = C_2 [k\rho_2(\bar{u}_1 - c)(\bar{u}_2 - c)\cosh(kh_2)], \end{aligned} \quad (4.14a)$$

$$\begin{aligned} C_1 [k\rho_1(\bar{u}_1 - c)(\bar{u}_2 - c)\cosh(kh_1)] = \\ = C_2 [k\rho_2(\bar{u}_2 - c)^2 \cosh(kh_2) - g(\rho_2 - \rho_1)\sinh(kh_2)]. \end{aligned} \quad (4.14b)$$

Vyjádříme-li z obou posledních rovnic poměr  $C_2/C_1$  a porovnáme je navzájem, získáme kvadratickou rovnici pro fázovou rychlost  $c$ :

$$\begin{aligned} (\rho_1 a_2 + \rho_2 a_1)c^2 - 2(\rho_1 \bar{u}_1 a_2 + \rho_2 \bar{u}_2 a_1)c + \\ + \left( \rho_1 \bar{u}_1^2 a_2 + \rho_2 \bar{u}_2^2 a_1 - \frac{g(\rho_2 - \rho_1)a_1 a_2}{k} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

kde jsme označili

$$a_1 \equiv \operatorname{tgh}(kh_1), \quad a_2 \equiv \operatorname{tgh}(kh_2).$$

Řešením rovnice (4.15) dostáváme frekvenční rovnici

$$c = \frac{\rho_1 \bar{u}_1 a_2 + \rho_2 \bar{u}_2 a_1}{\rho_1 a_2 + \rho_2 a_1} \pm \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \frac{a_1 a_2 (\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 a_2 + \rho_2 a_1} - \rho_1 \rho_2 a_1 a_2 \left( \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}{\rho_1 a_2 + \rho_2 a_1} \right)^2}, \quad (4.16)$$

kde vlnové číslo  $k$  souvisí s vlnovou délkou  $L$  vztahem  $k = 2\pi/L$ .

Zabývejme se nejprve několika speciálními případy.

a) Položme  $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0$ . Rovnice (4.16) se pak zjednoduší na tvar

$$c = \pm \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \frac{a_1 a_2 (\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 a_2 + \rho_2 a_1}}. \quad (4.17)$$

To znamená, že takové poruchy jsou stabilní ( $c$  je reálné číslo), je-li  $\rho_2 > \rho_1$ . Tomu odpovídá situace, kdy spodní tekutina má větší hustotu než tekutina, která leží nad ní. Je-li však  $\rho_1 > \rho_2$ , dostáváme nenulovou imaginární část fázové rychlosti  $c$ . Všimněme si, že v takovém případě je jedna porucha silící a druhá slábnoucí díky znaménku  $\pm$  v (4.17). Tento typ instability, který je způsoben růstem hustoty s výškou, bývá označován jako *statická instabilita*, *instabilita Taylorova typu* [15] nebo též *Rayleighova-Taylorova instabilita* [16]. Jsou-li obě tekutiny velmi hluboké, je  $a_1 \approx a_2 \approx 1$ , a poté

$$c = \pm \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}}. \quad (4.18)$$

Naopak jsou-li obě tekutiny velmi mělké a mají-li navíc stejnou tloušťku,  $h_1 = h_2 \equiv h$ , máme

$$c = \pm \sqrt{gh \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}}, \quad (4.19)$$

neboť pro taková  $h$  je  $a \equiv \operatorname{tgh}(kh) \approx kh$ .

V rovnici (4.17) položme  $a_1 = a_2 \equiv a$  (obě tekutiny mají stejnou hloubku), pak

$$c = \pm \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \frac{a(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \rho_2}}. \quad (4.20)$$

Z poslední rovnice je patrné, že rychlost stabilních gravitačních vln na rozhraní dvou tekutin stejné tloušťky roste se zvětšující se hloubkou tekutin. Podobně, jsou-li tyto vlny instabilní ( $\rho_1 > \rho_2$ ), pak jedna porucha sílí a druhá slábne rychleji při větší tloušťce vrstev než odpovídající poruchy na rozhraní tekutin s menší tloušťkou.

b) Položme nyní  $\rho_1 = \rho_2 \equiv \rho$ ,  $\bar{u}_1 \neq \bar{u}_2 \neq 0$ . Uvažujeme tedy jen stříh větru. Potom z (4.16) vyplývá

$$c = \frac{\bar{u}_1 a_2 + \bar{u}_2 a_1}{a_1 + a_2} \pm i \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}{a_1 + a_2} \sqrt{a_1 a_2}. \quad (4.21)$$

Nyní jsme obdrželi ryze *střížné vlny*, které mají nenulovou imaginární složku fázové rychlosti, jsou tedy instabilní. Opět si všimněme, že jedna porucha sílí a druhá slábne. Příčina instability již není „statická“, nýbrž „dynamická“. Tato instabilita bývá někdy nazývána *instabilitou Helmholtzova typu* [15]. Jsou-li obě tekutiny velmi hluboké, dostáváme z (4.21)

$$c = \frac{\bar{u}_1 + \bar{u}_2}{2} \pm i \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}{2}. \quad (4.22)$$

Naopak v případě velmi mělkých vrstev máme

$$c = \frac{\bar{u}_1 h_1 + \bar{u}_2 h_2}{h_1 + h_2} \pm i \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}{h_1 + h_2} \sqrt{h_1 h_2}. \quad (4.23)$$

Za povšimnutí stojí ještě jedna zajímavost. Mají-li totiž obě vrstvy stejnou tloušťku  $h_1 = h_2$ , pak

$$c = \frac{\bar{u}_1 + \bar{u}_2}{2} \pm i \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}{2}, \quad (4.24)$$

a takové poruchy se přemísťují stejnou rychlostí a mají stejnou rychlost růstu (růstový faktor) jako ryze střížné vlny na rozhraní dvou velmi hlubokých tekutin (viz vztah (4.22)).

c) Necht'  $\rho_1 = 0$ ,  $\bar{u}_1 = 0$ ,  $h_2 \equiv h$ ,  $\bar{u}_2 = \bar{u}$ . Máme tedy pouze jednu vrstvu tekutiny. Ze vztahu (4.16) pak obdržíme

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi}{L} h\right)}, \quad (4.25)$$

což je vzorec pro fázovou rychlost *vnějších gravitačních vln* na volné hladině tekutiny o tloušťce  $h$ . Je vidět, že takové vlny jsou stabilní – jejich amplituda se s časem nemění. Je-li tekutina navíc velmi hluboká, máme

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}. \quad (4.26)$$

To je *Stokesův vztah* pro vnější gravitační vlny na volné hladině jedné vrstvy velmi hluboké tekutiny, které bývají v anglosaské literatuře označovány také jako „deep-water waves“. Je-li však tekutina velmi mělká, je

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{gh}, \quad (4.27)$$

což je *Lagrangeův vztah* pro rychlost „dlouhých“ gravitačních vln na volné hladině mělké tekutiny. Takové vlny bývají v anglosaské literatuře označovány jako „shallow-water waves“ nebo jednoduše „long waves“.

d) Zajímavý je též případ, kdy na velmi hluboké tekutině spočívá velmi mělká tekutina, jejíž tloušťku označme  $h_1 \equiv h$ . Nechť dále  $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0$ , potom

$$c = \pm \sqrt{\frac{gh}{\rho_1 + \rho_2 kh}} (\rho_2 - \rho_1) \approx \pm \sqrt{\frac{gh}{\rho_1}} (\rho_2 - \rho_1). \quad (4.28)$$

V případě, že nad velmi mělkou tekutinou, jejíž tloušťku opět označíme  $h_2 = h$ , leží velmi hluboká tekutina, dostáváme (položíme-li opět  $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0$ )

$$c = \pm \sqrt{\frac{gh}{\rho_1 kh + \rho_2}} (\rho_2 - \rho_1) \approx \pm \sqrt{\frac{gh}{\rho_2}} (\rho_2 - \rho_1). \quad (4.29)$$

Porovnáme-li vztahy (4.28) a (4.29) vidíme, že se stabilní poruchy ( $\rho_1 > \rho_2$ ) pohybují v prvním případě rychleji než ve druhém. Jiná je situace v případě instability ( $\rho_1 < \rho_2$ ). Pak totiž sílící porucha roste v druhém případě rychleji než v prvním a slábnoucí porucha slábne také rychleji v druhém případě než v prvním.

e) V literatuře bývá také uváděna frekvenční rovnice pro gravitačně střížné vlny na rozhraní dvou velmi hlubokých tekutin. Položíme-li v (4.16)  $a_1 = a_2 = 1$ , dostáváme

$$c = \frac{\rho_1 \bar{u}_1 + \rho_2 \bar{u}_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} - \rho_1 \rho_2 \left( \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)^2}. \quad (4.40)$$

Je vidět, že poruchy s vlnovou délkou kratší než kritická vlnová délka  $L_{KH}$

$$L_{KH} = \frac{2\pi}{g} \frac{\rho_1 \rho_2 (\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2}{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 + \rho_2)} = \frac{2\pi}{g} \frac{\bar{T}_1 \bar{T}_2 (\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2}{(\bar{T}_1 - \bar{T}_2)(\bar{T}_1 + \bar{T}_2)} \quad (4.41)$$

jsou instabilní. Při přechodu od hustoty k teplotám v posledním vztahu jsme použili stavovou rovnici. O instabilitě spojené se vztahem (4.41) hovoříme jako o *Kelvinově-Helmholtzově instabilitě*. Odhadněme nyní orientačně numericky velikost kritické vlnové délky  $L_{KH}$ . Položíme-li  $\bar{u}_1 - \bar{u}_2 = 10 \text{ ms}^{-1}$ ,  $\bar{T}_1 = 280 \text{ K}$ ,  $\bar{T}_2 = 275 \text{ K}$ , vychází  $L_{KH} \approx 1800 \text{ m}$ .

Než se vrátíme k obecnému tvaru rovnice (4.16), je nutné ještě objasnit, co rozumíme pod pojmy „velmi hluboká tekutina“ a „velmi mělká tekutina“. Za velmi hlubokou tekutinu považujeme takovou, pro kterou je  $h > 0,4 L$ . Potom se totiž fázová rychlost vnějších gravitačních vln na volné hladině takové tekutiny určená pomocí vztahu (4.26) liší od své přesné hodnoty určené pomocí vztahu (4.25) o méně než 0,5 %. Podobně, velmi mělká tekutina je taková, pro kterou je  $h < L/25$ . Tehdy se totiž fázová rychlost vnější gravitačních vln na volné hladině takové tekutiny určená pomocí vztahu (4.27) také liší od své přesné hodnoty určené pomocí vztahu (4.25) o méně než 0,5 %.

Věnujme nyní pozornost obecnému případu gravitačně střížných vln. Ze vztahu (4.16) vyplývá, že všechny poruchy s vlnovou délkou kratší než kritická vlnová délka  $L_k$  jsou instabilní (amplituda jedné poruchy se časem zvětšuje, druhá zmenšuje). Všechny ostatní vlny s  $L > L_k$  jsou stabilní. Kritickou vlnovou délkou dostaneme, položíme-li výraz pod odmocninou v rovnici (4.16) roven nule:

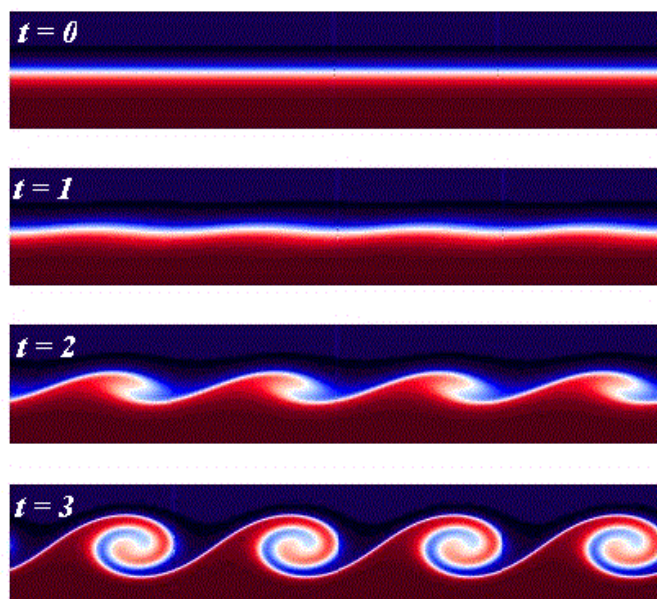
$$L_k = \frac{2\pi}{g} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \frac{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2}{\rho_1 a_2 + \rho_2 a_1}. \quad (4.42)$$

Čím větší je stříh větru, tím je  $L_k$  větší, tzn. instabilita se „posouvá“ i do oblasti delších vln. Je-li  $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ , je  $L_k = 0$  a všechny poruchy jsou stabilní (je-li zároveň  $\rho_2 > \rho_1$ ). Stříh větru tedy proudění destabilizuje, ale vliv tíže je opačný – stabilizující (při  $\rho_2 > \rho_1$ ). Pro krátké vlny ( $L < L_k$ ) převládá nestabilizující vliv stříhu větru, zatímco pro delší vlny ( $L > L_k$ ) je dominantní stabilizující působení zemské tíže. Při pevně zvolených hustotách a rychlostech proudění vede zvětšování tloušťek vrstev, nebo alespoň jedné z nich, k posunutí  $L_k$  ke kratším vlnovým délkám. To znamená, že se zvětšuje oblast stabilních vlnových délek. Jinými slovy to znamená, že gravitačně střížné vlny na rozhraní dvou tekutin mají tendenci být stabilní

vzhledem k hlubokým vrstvám a instabilní vzhledem k mělkým vrstvám tekutin.



Obr. 4.1 Oblačnost formovaná při Kelvinově-Helmholtzově instabilitě.



Obr. 4.2 Počítačová simulace vývoje Kelvinovy-Helmholtzovy instability. Čas  $t = 0$  představuje počáteční stav, kdy na sobě spočívají dvě vrstvy tekutiny, čas  $t = 1$  představuje lineární stádium, kdy dochází k nepatrnému rozvlnění rozhraní obou tekutin. Časy  $t = 2$  a  $t = 3$  reprezentují nelineární stadia vývoje instability.

Kelvinovu-Helmholtzovu instabilitu můžeme pozorovat jak v laboratorních podmínkách (viz například [8]), tak i v reálné atmosféře. Ve druhém případě je patrná z přítomnosti Kelvinových-Helmholtzových vln, v jejichž vrcholech vzniká při dostatečně vlhkém vzduchu typická oblačnost, která je znázorněna na [obrázku 4.1](#). V anglosaské literatuře bývá taková oblačnost označována jako *billow clouds*, zatímco čeština pro ni speciálního označení neužívá. Naším přístupem jsme byli schopni zachytit pouze počáteční stadium vývoje Kelvinovy-Helmholtzovy instability, kdy se rozhraní obou tekutin formuje do tvaru jednoduchých vlnek o nepříliš velké amplitudě. Nelineární stadia jsou zachycena na [obrázku 4.2](#) v bezrozměrných časech  $t = 2$  a  $t = 3$ .



## 5 PERTURBAČNÍ STAVOVÁ A TERMODYNAMICKÁ ROVNICE

Nyní odvodíme perturbační stavovou a termodynamickou rovnici pro model, který byl formulován v kapitole 2. Jednak tím uzavřeme soustavu perturbačních rovnic zmíněného modelu (perturbační rovnice kontinuity byla uvedena rovněž v kapitole 2), jednak odvozené rovnice využijeme v úvahách v dalším textu.

Pro přehlednost zopakujme, že výsledné pole rychlosti proudění, tlaku, hustoty (popřípadě měrného objemu) a teploty jsme uvažovali ve tvaru

$$\begin{aligned} \bar{u}(z) + u'(x, z, t), \\ w'(x, z, t), \\ \bar{p}(z) + p'(x, z, t), \\ \bar{\rho}(z) + \rho'(x, z, t), \\ \bar{T}(z) + T'(x, z, t), \end{aligned}$$

kde vodorovným pruhem jsou označeny veličiny popisující základní stav a svislou čarou malé odchylky od tohoto stavu, pro které platí  $\bar{u} \gg u'$ ,  $\bar{p} \gg p'$ ,  $\bar{\rho} \gg \rho'$ ,  $\bar{T} \gg T'$ . Symbol „ $\gg$ “ znamená „větší alespoň o jeden řád“.

Stavová rovnice základního stavu má tvar

$$\bar{p} = \bar{\rho}R\bar{T} \quad (5.1)$$

a výsledný stav platí

$$\bar{p} + p' = (\bar{\rho} + \rho')R(\bar{T} + T'), \quad (5.2)$$

což po roznásobení dává

$$\bar{p} + p' = R\bar{\rho}\bar{T} + R\bar{\rho}T' + R\rho'\bar{T} + R\rho'T'.$$

V poslední rovnici zanedbáme čtvrtý člen na pravé straně. Přihlédneme-li navíc k rovnici (4.1), dostaneme po vydělení poslední rovnice  $\bar{p}$

$$\frac{p'}{\bar{p}} = \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \frac{T'}{\bar{T}}. \quad (5.3a)$$

To je hledaný tvar perturbační stavové rovnice. Ještě poznamenejme, že kdybychom místo s hustotou  $\rho$  pracovali s měrným objemem  $\alpha$ , získali bychom alternativní tvar perturbační stavové rovnice

$$\frac{p'}{\bar{p}} + \frac{\alpha'}{\bar{\alpha}} = \frac{T'}{\bar{T}}. \quad (5.3b)$$

Uvažujme termodynamickou rovnici (první hlavní větu termodynamickou) ve tvaru

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = T \frac{ds}{dt}, \quad (5.4)$$

kde  $s$  značí měrnou entropii a  $c_p$  měrné teplo při stálém tlaku. Do této rovnice dosadíme veličiny popisující výsledný (složený) stav:

$$c_p \left( \frac{dT'}{dt} + w' \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{1}{\left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)} \frac{d}{dt} \left[ \bar{p} \left(1 + \frac{p'}{\bar{p}}\right) \right] = (\bar{T} + T') \frac{ds}{dt}. \quad (5.5)$$

Totální derivaci podle času ve druhém sčítanci na levé straně poslední rovnice vyjádříme následovně:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \bar{p} \left(1 + \frac{p'}{\bar{p}}\right) \right] &= \left(1 + \frac{p'}{\bar{p}}\right) \frac{d\bar{p}}{dt} + \bar{p} \frac{d}{dt} \left( \frac{p'}{\bar{p}} \right) = w' \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \bar{p} \frac{d}{dt} \left( \frac{p'}{\bar{p}} \right) = \\ &= -\bar{\rho} g w' + \bar{p} \frac{d}{dt} \left( \frac{p'}{\bar{p}} \right), \end{aligned} \quad (5.6)$$

kde jsme použili rovnici hydrostatické rovnováhy pro základní stav a zanedbali poměr  $p'/\bar{p}$  ve srovnání s jedničkou ve členu, který stojí před derivací  $d\bar{p}/dt$ . Vydělíme-li rovnici (5.5)  $\bar{T}$ , zanedbáme poměry  $\rho'/\bar{\rho}$  a  $T'/\bar{T}$  ve srovnání s jedničkou a dosadíme vyjádření (5.6) do rovnice (5.5), obdržíme, s přihlédnutím k perturbační stavové rovnici (5.3a),

$$c_p \frac{d}{dt} \left( \frac{T'}{\bar{T}} \right) + \frac{c_p w'}{\bar{T}} \left( \gamma_d + \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) - R \frac{d}{dt} \left( \frac{p'}{\bar{p}} \right) = \frac{ds}{dt}, \quad (5.7)$$

kde jsme navíc využili, že

$$\frac{T'}{\bar{T}^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \ll \frac{1}{\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}, \quad \gamma_d \equiv \frac{g}{R};$$

$\gamma_d$  představuje suchoadiabatický gradient teploty. Dosadíme-li do (5.7) znovu pomocí (5.3a) a využijeme-li Mayerova vztahu  $c_p = R + c_v$ , získáme

$$c_p \frac{d}{dt} \left( \frac{c_v p'}{c_p \bar{p}} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) + \frac{c_p w'}{\bar{T}} \left( \gamma_d + \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) = \frac{ds}{dt}. \quad (5.8)$$

Druhý sčítanec upravíme pomocí Poissonovy rovnice (definice potenciální teploty)

$$\bar{\theta} = \bar{T} \left( \frac{p_0}{\bar{p}} \right)^{R/c_p}, \quad (5.9)$$

kteřou logaritmicky derivujeme podle času

$$\frac{1}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dt} = \frac{1}{\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dt} - \frac{R}{c_p \bar{p}} \frac{d\bar{p}}{dt},$$

kde

$$\frac{d\bar{T}}{dt} = w' \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}, \quad \frac{d\bar{p}}{dt} = w' \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho} g w'.$$

Tedy

$$\frac{1}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dt} = \frac{w'}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \frac{w'}{\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \frac{w'}{\bar{T}} \frac{g}{c_p} = \frac{w'}{\bar{T}} \left( \gamma_d + \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right). \quad (5.10)$$

Označme

$$\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}, \quad (5.11)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}; \quad (5.12)$$

$\omega_0$  představuje *Brunt-Vaisalovu frekvenci*. Dosazením výrazů (5.10), (5.11) a (5.12) do rovnice (5.8) získáme hledaný tvar perturbační termodynamické rovnice:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\gamma} \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) + \frac{\omega_0^2 w'}{g} = \frac{1}{c_p} \frac{ds}{dt}. \quad (5.13)$$

## 6 STABILITA VNITŘNÍCH GRAVITAČNÍCH (VZTLAKOVÝCH) VLN

V kapitole 4 jsme pojednávali o stabilitě vlnových pohybů v soustavě, která se skládala ze dvou tekutin s odlišnými hustotami, popřípadě rozdílnými rychlostmi proudění. Vzniklé vlny byly spojeny s diskontinuitou v poli hustoty, popřípadě rychlosti proudění. Takové vlny je možné označit jako gravitačně střížné.

V následující části budeme uvažovat *vztlakové vlny* v tekutině se spojitým průběhem hustoty v základním stavu, které vznikají rozdílným působením gravitace a vztlakových archimédovských sil na případné nehomogenity v rozložení hustoty. Tyto nehomogenity můžeme v rámci dříve představené perturbační teorie považovat za perturbace. Abychom zachovali návaznost na předešlé kapitoly knihy, použijeme model formulovaný v kapitole 2, ale budeme uvažovat pouze vlny šířící se vertikálním směrem. Proto položíme  $\bar{u} = 0$ ,  $u' = 0$ .

Perturbační pohybová rovnice ve vertikálním směru (2.4b) a perturbační rovnice kontinuity (2.4c) budou mít tvar

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} g, \quad (6.1a)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + w' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = 0. \quad (6.1b)$$

K těmto dvěma rovnicím je třeba přidat rovnici třetí, neboť rovnice (6.1a) a (6.1b) obsahují tři nezávisle proměnné. Bude jí termodynamická rovnice (5.13) odvozená v předchozím textu. Navíc uvážíme předpoklad adiabatičnosti probíhajících procesů, to znamená

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\gamma} \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) + \frac{\omega_0^2 w'}{g} = 0.$$

Tuto rovnici ještě upravíme na vhodnější tvar. Totální derivaci podle času v poslední rovnici provedeme následovně:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\gamma} \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) &= \\ &= \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{1}{\bar{p}} \left( \frac{\partial p'}{\partial t} + w' \frac{\partial p'}{\partial z} \right) - \frac{p'}{\bar{p}^2} w' \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right] - \frac{1}{\bar{\rho}} \left( \frac{\partial \rho'}{\partial t} + w' \frac{\partial \rho'}{\partial z} \right) + \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} w' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \approx \\ &\approx \frac{1}{\gamma \bar{p}} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \rho'}{\partial t}, \end{aligned}$$

kde jsme zanedbali všechny členy nelineární vzhledem k poruchám. Termodynamickou rovnici je pak možno psát ve tvaru

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - \gamma \bar{p} \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \gamma \bar{p} \frac{\omega_0^2 w'}{g} = 0. \quad (6.1c)$$

Rovnice (6.1) tvoří soustavu tří parciálních diferenciálních rovnic pro tři neznámé. V souladu s metodou normálních modů hledíme její řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} w' &= \hat{w} e^{i(kz - \omega t)}, \\ p' &= \hat{p} e^{i(kz - \omega t)}, \\ \rho' &= \hat{\rho} e^{i(kz - \omega t)}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

kde  $\omega = kc$  značí kruhovou frekvenci. Dosazením řešení (6.2) do rovnic (6.1) přejde tato soustava parciálních diferenciálních rovnic na homogenní soustavu algebraických rovnic

$$\begin{aligned} i\omega \bar{\rho} \hat{w} \quad & - ik\hat{p} \quad & - g\hat{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \hat{w} \quad & & - i\omega \hat{\rho} &= 0, \\ \gamma \bar{\rho} \bar{p} \frac{\omega_0^2}{g} \hat{w} - i\omega \bar{\rho} \hat{p} + i\omega \gamma \bar{p} \hat{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Z algebry je dobře známo, že tato soustava má netriviální řešení právě tehdy, když determinant sestavený z jejích koeficientů je roven nule.

Tedy

$$\begin{vmatrix} i\omega\bar{\rho} & -ik & -g \\ \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z} & 0 & -i\omega \\ \gamma\bar{\rho}\bar{p}\frac{\omega_0^2}{g} & -i\omega\bar{\rho} & i\omega\gamma\bar{p} \end{vmatrix} = 0,$$

což vede na frekvenční rovnici

$$-\left(\gamma\bar{\rho}\bar{p}\frac{\omega_0^2}{g}k + \gamma\bar{p}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}k\right) + i\left(g\bar{\rho}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z} + \bar{\rho}^2\omega^2\right) = 0.$$

Vyčleněním reálné a imaginární části z poslední rovnice obdržíme

$$\omega^2 = -\frac{g}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}, \quad (6.4)$$

a zároveň

$$\omega_0^2 = -\frac{g}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}, \quad (6.5)$$

Odkud je zřejmé, že k oscilacím tvaru (6.2) dochází s kruhovou frekvencí rovnou Brunt-Vaisalově frekvenci  $\omega_0$ . Porovnáme-li výrazy (6.4), (6.5) a definici Brunt-Vaisalovy frekvence (5.12) vidíme, že

$$\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z} = -\frac{g}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}. \quad (6.6)$$

Poslední rovnost ve vyjádření (6.6) pochopitelně obecně neplatí – je poplatná našemu modelu a vlastně je důsledkem toho, že naše tekutina je boussisquovská (více podrobností viz například [17]).

Je evidentní, že je-li  $\partial\bar{\theta}/\partial z > 0$  (resp.  $\partial\bar{\rho}/\partial z > 0$ ), je  $\omega$  reálné číslo a porucha reprezentovaná výrazy (6.2) je stabilní. Naopak je-li  $\partial\bar{\theta}/\partial z < 0$  (resp.  $\partial\bar{\rho}/\partial z < 0$ ) máme co do činění s instabilním případem vnitřních gravitačních vln.

Není obtížné nahlédnout, že z Poissonovy rovnice (v české odborné literatuře tradičně označované jako definice potenciální teploty)  $\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/c_p}$ ,

kde  $p_0 = 1\,000$  hPa, při platnosti rovnice hydrostatické rovnováhy a využití stavové rovnice vyplývá, že

$$\frac{\bar{T}}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \gamma_d - \gamma, \quad (6.7)$$

kde  $\gamma_d = g/c_p$  je suchoadiabatický teplotní gradient a  $\gamma = -\partial \bar{T} / \partial z$  je lokální teplotní gradient. Poté lze, vzhledem ke zmíněným teplotním gradientům, podmínky stability vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} \gamma > \gamma_d &- \text{instabilita}, \\ \gamma < \gamma_d &- \text{stabilita}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Je-li  $\gamma_d = \gamma$ , hovoříme o indiferentním případě nebo indiferentním teplotním vertikálním zvrstvení prostředí.

Případ zmíněných vln jsme studovali eulerovsky, i když tradičně bývají vztakové oscilace studovány metodou částice, tedy lagrangeovsky, kdy se odvozuje řešení pro výchylku vzduchové částice ve vertikálním směru z rovnovážné polohy. Není obtížné si uvědomit, že oba přístupy jsou ekvivalentní. Představíme-li si totiž pod našimi perturbacemi vzduchovou částici<sup>\*)</sup>, pro její výchylku  $\delta z$  z rovnovážné polohy ve stabilním případě podle (6.2) platí

$$\frac{d\delta z}{dt} = w' = \hat{w} e^{i(kz - \omega_0 t)}. \quad (6.9)$$

Na tomto místě připomínáme, že fyzikální význam má pouze reálná část výrazu (6.9). Integrací poslední rovnice s počáteční podmínkou  $w'(t=0) = w_0$  a užitím Eulerova vzorce  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  dostáváme pro výchylku vzduchové částice z rovnovážné polohy v čase  $t$  výraz

$$\delta z = \frac{w_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad (6.10)$$

---

<sup>\*)</sup> Vzduchová částice (nebo obecně částice tekutiny) představuje abstrakci, pod kterou rozumíme určitý objem vzduchu (tekutiny), který splňuje následující požadavky:

1. je dostatečně velký, abychom nemuseli uvažovat jeho molekulární strukturu, to znamená, že obsahuje řádově několik miliónů molekul vzduchu (tekutiny). To nám umožňuje uvnitř tohoto objemu dobře definovat veličiny jako je teplota, tlak atd.;
2. je dostatečně malý na to, abychom uvnitř tohoto objemu mohli zanedbat prostorové změny teploty, tlaku a dalších veličin, které nám dovolila uvnitř objemu zavést podmínka 1.;
3. je tak malý, že při svém pohybu prostředím nevyvolává kompenzující pohyby ve svém okolí.



ze kterého je zřejmé, že vzduchová částice koná kolem své rovnovážné polohy harmonické oscilace s periodou  $T_0=2\pi/\omega_0$ . Hodnota Brunt-Vaisalovy frekvence se v atmosféře mění jak s výškou, tak s roční dobou; v troposféře klesá s výškou a je zde větší v zimě než v létě, nad troposférou se nemění monotónně [10]. Pro průměrné troposférické podmínky můžeme orientačně položit  $\omega_0 \approx 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$  [3]. Pak vychází  $T_0 \approx 8$  minut.

Není obtížné se přesvědčit [4], že v případě  $\partial \bar{\theta} / \partial z < 0$ , a přepíšeme-li navíc  $\omega_0$  jako

$$\omega_0 = i \sqrt{\left| \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right|},$$

vychází pro výchylku  $\delta z$

$$\delta z = \frac{w_0 \left( e^{\sqrt{\left| \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right|} t} - e^{-\sqrt{\left| \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right|} t} \right)}{2 \sqrt{\left| \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right|}}. \quad (6.11)$$

Z prvního členu poslední rovnice vyplývá, že  $\delta z$  roste exponenciálně s časem, což je jasný znak instabilní situace.

Poznámka 1: v rovnici (6.1a) jsme mohli pro Boussinesquovskou tekutinu druhý výraz na pravé straně  $-\frac{\rho'}{\bar{\rho}}g$  nahradit členem obsahující potenciální teplotu  $\frac{\theta'}{\bar{\theta}}g$  a zmíněnou rovnici psát ve tvaru

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g.$$

Oprávněnost takové záměny vyplývá z následujících úvah. Logaritmickým derivováním Poissonovy rovnice (definice potenciální teploty)  $\theta = T(p_0/p)^{R/c_p}$  podle  $z$  dostáváme

$$\frac{1}{\bar{\theta}} \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} - \frac{R}{pc_p} \frac{dp}{dz}.$$

Ze stavové rovnice  $p = \rho RT$  vyplývá

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dz} = \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}.$$

Kombinace posledních rovnic vede na

$$\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\rho} \left[ \left( \frac{\rho c_v}{p c_p} \right) \frac{dp}{dz} - \frac{d\rho}{dz} \right],$$

$c_s^2 = (c_p / c_v)(p / \rho)$  je kvadrát rychlosti zvuku. Tedy

$$\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{c_s^2} \frac{dp}{dz} - \frac{d\rho}{dz} \right].$$

Vezmeme-li v úvahu, že pohyby v atmosféře i rychlost šíření gravitačních vln v atmosféře jsou menší než rychlost šíření zvuku, redukuje se poslední rovnice na

$$\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dz} = - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz}.$$

Identifikujeme-li nyní  $d\theta$  a  $d\rho$  s perturbacemi  $\theta'$  a  $\rho'$  objasňuje se nám oprávněnost záměny  $-\frac{\rho'}{\rho} g$  za  $\frac{\theta'}{\theta} g$  z počátku této poznámky.

## 7 NELINEÁRNÍ ZOBECNĚNÍ METODY ČÁSTICE

Stabilita vertikálního zvrstvení atmosféry bývá tradičně studována metodou částice. Tuto metodu můžeme v prvním přiblížení použít ke zhodnocení možnosti vývoje konvektivních vertikálních pohybů. Úvahy spojené s klasickou metodou částice jsou meteorologické veřejnosti dobře známé a vedou vlastně na závěry, které jsme uváděli v předešlé kapitole o vnitřních gravitačních (vztlakových) vlnách. Citujme na tomto místě tedy pouze východiska a některá fakta související s klasickou metodou částice s tím, že podrobné odvození je publikováno v [4] nebo v české odborné literatuře například v [5] nebo [18].

Označíme-li veličiny, které vztahujeme ke vzduchové částici indexem  $p$ , zatímco veličiny popisující stav okolního vzduchu ponecháme bez indexu, a předpokládáme-li, že

a) tlak uvnitř vzduchové částice  $p_p$  se vždy přizpůsobuje okolnímu tlaku  $p$ , tzn.  $p_p = p$ ,

b) vzduchová částice se pohybuje adiabaticky, takže se nemění její potenciální teplota  $\theta_p$ ,  
vyplývá z těchto podmínek, že

$$\frac{\rho}{\rho_p} = \frac{T_p}{T} = \frac{\theta_p}{\theta}. \quad (7.1)$$

Pro zrychlení vzduchové částice po jejím vychýlení z rovnovážné polohy, ve které splývá se svým okolím, platí

$$\frac{dw_p}{dt} = \frac{d^2\delta z}{dt^2} = g \frac{\rho - \rho_p}{\rho_p} = g \frac{T_p - T}{T} = g \frac{\theta_p - \theta}{\theta}. \quad (7.2)$$

Po přijetí dalšího předpokladu, že výchylka  $\delta z$  vzduchové částice je natolik malá, že můžeme rozdíl potenciálních teplot  $\theta - \theta_p$  ve výšce  $\delta z$  nad rovnovážnou polohou aproximovat prvním členem Taylorova rozvoje

$$\theta - \theta_p = \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \delta z ,$$

dostáváme diferenciální rovnici pro výchylku  $\delta z$ :

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} + \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta z = 0 . \quad (7.3)$$

Její rozbor pak vede na závěry zmiňované v závěru kapitoly o stabilitě vnitřních gravitačních (vztlakových) vln, a to na kritéria (6.8).

Nyní prozkoumejme pohyb vzduchové částice znovu, důkladněji, a to v případě, kdy již není výchylka  $\delta z$  tak malá, že bychom mohli zanedbat nelineární efekty, respektive použít prvního členu Taylorova rozvoje k vyjádření rozdílu  $\theta - \theta_p$  [4]. Považujme nadále pohyb vzduchové částice za adiabatický, takže můžeme první hlavní větu termodynamickou pro vzduchovou částici psát ve tvaru

$$c_p \frac{dT_p}{dt} - \alpha_p \frac{dp}{dt} = 0 . \quad (7.4)$$

Dále předpokládejme, že lokální časová změna tlaku a změna tlaku způsobená horizontální advekcí je zanedbatelná. Za stálé platnosti předpokladu a) máme pro individuální změnu tlaku vzduchové částice:

$$\frac{dp_p}{dt} = \frac{dp}{dt} = w_p \frac{\partial p}{\partial z} = -g \rho w_p , \quad (7.5)$$

kde jsme využili předpokladu, že prostředí obklopující vzduchovou částici splňuje rovnici hydrostatické rovnováhy. Z kombinace posledních dvou rovnic vyplývá, že

$$c_p \frac{dT_p}{dt} = g w_p \alpha_p \rho = 0 . \quad (7.6)$$

Uvážíme-li navíc vztah (7.1), můžeme poslední rovnici přepsat do tvaru

$$c_p \frac{dT_p}{dt} + g w_p \frac{T_p}{T} = 0 . \quad (7.7)$$

Rovnici (7.2) ještě můžeme uvést ve vhodnějším vyjádření

$$\frac{dw_p}{dt} - g \frac{T_p - T}{T} = 0. \quad (7.8)$$

Vztahy (7.7) a (7.8) tvoří systém rovnic pro vertikální rychlost  $w_p$  (a tedy zároveň výchylku  $\delta z$ ) vzduchové částice, která se pohybuje atmosférou o libovolném teplotním profilu  $T(z)$ .

Předpokládáme-li, že teplota okolí vzduchové částice  $T$  je pouze funkcí vertikální souřadnice  $z$ , můžeme z posledních dvou rovnic eliminovat teplotu  $T_p$ . Dostáváme:

$$\frac{d^2 w_p}{dt^2} + \frac{w_p}{T} \frac{dw_p}{dt} (\gamma_d - \gamma) + \frac{w_p g}{T} (\gamma_d - \gamma) = 0. \quad (7.9)$$

Integrací (7.9) obdržíme:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{dw_p}{dt} e^{\int_0^t \frac{w_p}{T} (\gamma_d - \gamma) d\tau} \right] + \frac{w_p g}{T} e^{\int_0^t \frac{w_p}{T} (\gamma_d - \gamma) d\tau} = 0. \quad (7.10)$$

Vynásobením této rovnice rychlostí  $w_p$  a přeskupením jednotlivých členů máme

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \frac{dw_p^2}{dt} e^{\int_0^t \frac{w_p}{T} (\gamma_d - \gamma) d\tau} \right] + \left[ \frac{w_p g}{T} (\gamma_d - \gamma) - \left( \frac{dw_p}{dt} \right)^2 \right] e^{\int_0^t \frac{w_p}{T} (\gamma_d - \gamma) d\tau} = 0. \quad (7.11)$$

Zavedme nyní počáteční podmínky. Necht' v čase  $t = 0$  je rychlost vzduchové částice  $w_p = 0$  a její zrychlení necht' je konečné, tedy  $dw^2/dt = w dw/dt = 0$ . Provedením integrace s těmito počátečními podmínkami dostáváme výsledek

$$\frac{dw^2}{dt} = 2e^{-\int_0^t \frac{w_p}{T} (\gamma_d - \gamma) d\tau} \int_0^t \left[ \left( \frac{dw_p}{d\tau} \right)^2 - \frac{w_p^2 g}{T} (\gamma_d - \gamma) \right] e^{\int_0^{\tau} \frac{w_p}{T} (\gamma_d - \gamma) d\tau'} d\tau. \quad (7.12)$$

Z něho je zřejmé, že je-li  $\gamma_d < \gamma$  po celé trajektorii vzduchové částice od jejího počátečního bodu, jsou oba členy na pravé straně rovnice (7.12) kladné a kinetická energie vzduchové částice roste. To tedy znamená, že nerovnost  $\gamma_d < \gamma$  zajišťuje instabilitu. Naopak předpokládáme-li stabilní situaci, pak musí být

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - \frac{w_p^2}{T}(\gamma_d - \gamma) < 0 \quad (7.13)$$

alespoň podél části trajektorie vzduchové částice, a proto alespoň někde musí být  $\gamma_d > \gamma$ . Podrobnějším rozбором jsme tedy získali naprosto identická stabilitní kritéria (6.8) jako jednodušší analýzou. To nebývá příliš častá situace, naopak pečlivější rozbor, zejména zahrnutí nelineárních vlivů, spíše vede na poněkud modifikovaná stabilitní kritéria [4]. To v dalším textu bude dobře dokumentováno při vyšetřování například inerční instability.

## 8 KRITICKÉ RICHARDSONOVO ČÍSLO

V předchozích kapitolách, kde jsme pojednávali o stabilitě gravitačně střížných vln, proti sobě působily dva faktory: stabilizující vliv zemské tíže (při stabilním vertikálním zvrstvení v tekutině) a destabilizující vliv stříhu větru (gradient rychlosti proudění).

Vhodným parametrem, který zahrnuje oba faktory, je *Richardsonovo číslo*, nazývané též Richardsonovo číslo v gradientovém tvaru, definované jako

$$Ri = \frac{\omega_0^2}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^2}. \quad (8.1)$$

Za předpokladu vzájemné rovnosti koeficientů turbulentní difúze pro hybnost a pro teplo toto číslo vyjadřuje poměr mezi termickou produkcí (nebo zánikem) kinetické energie a produkcí této energie z mechanických příčin [18]. V meteorologii se tohoto čísla proto používá k hodnocení stupně možnosti rozvoje konvektivních a turbulentních pohybů vzduchu v atmosféře. Za mezní případ bychom mohli mylně označit stav, kdy je veškerá mechanicky generovaná kinetická energie při stabilním teplotním zvrstvení okamžitě spotřebována. Této situaci by odpovídala hodnota Richardsonova čísla  $Ri = 1$ . Jak ukážeme v dalším textu, není takováto interpretace zcela správná, a hraniční, mohli bychom říci kritická, hodnota Richardsova čísla je rovna číslu  $1/4$ .

## 8.1 Klasické odvození Milesova-Howardova teorému

Nyní odvodíme stabilitní kritérium vztažené k tomuto číslu pro model tekutiny zavedený v kapitole 2. To znamená, že uvažujeme nestlačitelnou tekutinu v rovině  $xz$ , jejíž výsledný stav je popsán veličinami,  $\bar{u}(z)+u'$ ,  $w'$ ,  $\bar{p}(z)+p'$ ,  $\bar{\rho}(z)+\rho'$ ,  $\bar{T}(z)+T'$ . Pro takovou tekutinu jsme odvodili rovnici (3.4), do které pomocí (6.6) zavedeme Brunt-Vaisalovu frekvenci  $\omega_0$ ,  $\delta = \omega_0^2 / g$ . Tedy

$$(\bar{u} - c)^2 \left( \frac{d^2 \hat{\psi}}{dz^2} - k^2 \hat{\psi} - \frac{\omega_0^2}{g} \frac{d \hat{\psi}}{dz} \right) - (\bar{u} - c) \left( \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} - \frac{\omega_0^2}{g} \frac{d \bar{u}}{dz} \right) \hat{\psi} = -\omega_0^2 \hat{\psi}.$$

Poslední rovnici je pro další úvahy možné převést na výhodnější tvar

$$(\bar{u} - c)^2 \frac{d}{dz} \left( \bar{\rho} \frac{d \hat{\psi}}{dz} \right) - (\bar{u} - c) \hat{\psi} \frac{d}{dz} \left( \bar{\rho} \frac{d \bar{u}}{dz} \right) + k^2 \left[ \frac{\omega_0^2}{k^2} - (\bar{u} - c)^2 \right] \bar{\rho} \hat{\psi} = 0. \quad (8.2a)$$

Při úpravě jsme použili

$$\frac{d}{dz} \left( \bar{\rho} \frac{d \hat{\psi}}{dz} \right) = \frac{d \bar{\rho}}{dz} \frac{d \hat{\psi}}{dz} + \bar{\rho} \frac{d^2 \hat{\psi}}{dz^2}.$$

Předpokládejme dále, že tekutina je ohraničena neprostupnými hranicemi rovnoběžnými s osou  $x$  ve vzdálenostech  $z = d$ ,  $z = -d$ . K rovnici (8.2a) je třeba přidat vhodné okrajové podmínky, které by vyjadřovaly, že normálová složka rychlosti proudění k zavedeným neprostupným hranicím je nulová. To znamená, že

$$\hat{\psi}(\pm d) = 0. \quad (8.2b)$$

Definujme novou funkci  $F(z)$  vztahem

$$\hat{\psi} \equiv \sqrt{\Omega} F(z), \quad \Omega \equiv (\bar{u} - c). \quad (8.3)$$

Dosadíme-li (8.3) do (8.2), obdržíme

$$\Omega^2 \frac{d}{dz} \left[ \bar{\rho} \frac{d}{dz} (\sqrt{\Omega} F) \right] - \Omega^{3/2} F \frac{d}{dz} \left( \bar{\rho} \frac{d \bar{u}}{dz} \right) + k^2 \left( \frac{\omega_0^2}{k^2} - \Omega^2 \right) \bar{\rho} \sqrt{\Omega} F = 0, \quad (8.4a)$$

$$\sqrt{\Omega} F(\pm d) = 0. \quad (8.4b)$$

Nyní rovnici (8.4a) vynásobme  $\Omega^{-3/2} F^*$ , kde  $F^*$  značí funkci komplexně sdruženou k funkci  $F$ :



$$\sqrt{\Omega}F^* \frac{d}{dz} \left[ \bar{\rho} \frac{d}{dz} (\sqrt{\Omega}F) \right] - |F|^2 \frac{d}{dz} \left( \bar{\rho} \frac{d\bar{u}}{dz} \right) + \frac{k^2 \bar{\rho}}{\Omega} |F|^2 \left( \frac{\omega_0^2}{k^2} - \Omega^2 \right) = 0. \quad (8.5)$$

Přitom jsme použili  $|F| = F \cdot F^*$ .

Dále integrujme rovnici (8.5) podél  $z$  od  $-d$  do  $+d$ :

$$\int_{-d}^d \sqrt{\Omega}F^* \frac{d}{dz} \left[ \bar{\rho} \frac{d}{dz} (\sqrt{\Omega}F) \right] dz - \int_{-d}^d |F|^2 \frac{d}{dz} \left( \bar{\rho} \frac{d\bar{u}}{dz} \right) dz + \int_{-d}^d \left( \frac{\omega_0^2}{k^2} - \Omega^2 \right) \frac{k^2 \bar{\rho}}{\Omega} |F|^2 dz = 0. \quad (8.6)$$

První integrál na levé straně v (8.6) označme  $I$  a upravme integraci per partes:

$$I \equiv \int_{-d}^d \sqrt{\Omega}F^* \frac{d}{dz} \left[ \bar{\rho} \frac{d}{dz} (\sqrt{\Omega}F) \right] dz = \left[ \sqrt{\Omega}F^* \bar{\rho} \frac{d}{dz} (\sqrt{\Omega}F) \right]_{-d}^d - \int_{-d}^d \bar{\rho} \frac{d}{dz} (\sqrt{\Omega}F) \frac{d}{dz} (\sqrt{\Omega}F^*) dz. \quad (8.7)$$

Integrál na pravé straně v (8.7) upravíme pomocí

$$\frac{d}{dz} (\sqrt{\Omega}F) = \sqrt{\Omega} \frac{dF}{dz} + \frac{1}{2\sqrt{\Omega}} \frac{d\bar{u}}{dz}$$

na tvar

$$\int_{-d}^d \bar{\rho} \frac{d}{dz} (\sqrt{\Omega}F) \frac{d}{dz} (\sqrt{\Omega}F^*) dz = \int_{-d}^d \bar{\rho} \left[ \Omega \left| \frac{dF}{dz} \right|^2 + \frac{1}{4\Omega} \left( \frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2 |F|^2 \right] dz + \frac{1}{2} \int_{-d}^d \bar{\rho} \frac{d\bar{u}}{dz} \frac{d|F|^2}{dz} dz,$$

což po dosazení do (8.7) dává

$$I = \left[ \sqrt{\Omega}F^* \bar{\rho} \frac{d}{dz} (\sqrt{\Omega}F) \right]_{-d}^d - \int_{-d}^d \bar{\rho} \left[ \Omega \left| \frac{dF}{dz} \right|^2 + \frac{1}{4\Omega} \left( \frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2 |F|^2 \right] dz - \frac{1}{2} \int_{-d}^d \bar{\rho} \frac{d\bar{u}}{dz} \frac{d|F|^2}{dz} dz. \quad (8.8)$$

Poslední sčítanec v (8.8) integrujme per partes

$$\frac{1}{2} \int_{-d}^d \bar{\rho} \frac{d\bar{u}}{dz} \frac{d|F|^2}{dz} dz = \left[ \frac{1}{2} \bar{\rho} \frac{d\bar{u}}{dz} |F|^2 \right]_{-d}^d - \frac{1}{2} \int_{-d}^d |F|^2 \frac{d}{dz} \left( \bar{\rho} \frac{d\bar{u}}{dz} \right) dz.$$

Uvážíme-li okrajovou podmínku (8.4b), poslední rovnice i výraz (8.8) se zjednoduší:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-d}^d \frac{d}{dz} \left( \bar{\rho} \frac{d\bar{u}}{dz} \right) |F|^2 dz - \int_{-d}^d \bar{\rho} \left[ \Omega \left| \frac{dF}{dz} \right|^2 + \frac{1}{4\Omega} \left( \frac{d\bar{u}}{dz} \right) |F|^2 \right] dz.$$

Dosazením tohoto vyjádření do (8.6) dostaneme

$$\int_{-d}^d \Omega \left( \left| \frac{dF}{dz} \right|^2 + k^2 |F|^2 \right) \bar{\rho} dz - \int_{-d}^d \Omega^* \left[ \omega_0^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{d\bar{u}}{dz} \right) \right] \left| \frac{F}{\Omega} \right|^2 \bar{\rho} dz + \frac{1}{2} \int_{-d}^d \frac{d}{dz} \left( \bar{\rho} \frac{d\bar{u}}{dz} \right) |F|^2 dz = 0. \quad (8.9)$$

Ve druhém integrálu v (8.9) jsme použili  $1/\Omega = \Omega^*/|\Omega|^2$ . Dosadíme-li do rovnice (8.9) za fázovou rychlost  $c = c_r + ic_i$  a vyčleníme-li z této rovnice imaginární část, získáme

$$c_i \int_{-d}^d \left\{ \left( \left| \frac{dF}{dz} \right|^2 + k^2 |F|^2 \right) + \left[ \omega_0^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dz = 0. \quad (8.10)$$

Jsou dvě možnosti jak zaručit platnost poslední rovnice:

a) je-li  $\omega_0^2 \geq \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2$ , pak musí být  $c_i = 0$  a námi uvažovaná porucha je tedy stabilní,

b) je-li  $c_i \neq 0$ , porucha je tedy instabilní, a pak musí být  $\omega_0^2 < \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2$  pro nějaké  $z$  mezi  $-d$  a  $d$ .

Možnost a) vlastně vyjadřuje postačující podmínku stability, zatímco varianta b) představuje nutnou podmínku instability našich poruch. Je-li  $\partial \bar{u} / \partial z \neq 0$  můžeme s přihlédnutím k definici Richardsonova čísla (8.1) uvedené podmínky psát ve tvaru:

a) postačující podmínka stability je  $Ri \geq \frac{1}{4}$  pro všechna  $z$  mezi  $-d$  a  $d$ ,

b) nutná podmínka instabilita je  $Ri < \frac{1}{4}$  někde mezi  $-d$  a  $d$ .

Tyto podmínky jsou předmětem tvrzení tzv. *Milesova-Howardova teorému* [19,20] a hodnotě, kdy je Richardsonovo číslo rovné 1/4, můžeme říkat kritická, tedy

$$Ri_k = \frac{1}{4}.$$

Na tomto místě je třeba ještě poznamenat, že Milesův-Howardův teorém bývá tradičně odvozován ze zjednodušeného tvaru rovnice (3.4), a to z Taylorovy-Goldsteinovy rovnice (3.5). Ukázali jsme, že je možné jeho odvození provést i za obecnějších podmínek.

## 8.2 Odvození Milesova-Howardova teorému na základě energetických úvah a metody částic

Ke stejným závěrům o kritické hodnotě Richardsonova čísla můžeme dospět méně formálními úvahami založenými na metodě dvou částic a energetických vztazích [4]. Uvažujme dvě vzduchové částice, které se na počátku nacházejí v nepříliš vzdálených hladinách  $z_0$  a  $z_0 + \Delta z$  a které jsou v tomto počátečním stavu v rovnováze se svým okolím, mají tedy stejnou hustotu  $\rho$ , potenciální teplotu  $\theta$  a rychlost proudění  $U$  jako okolní vzduch (viz [obrázek 8.1](#)). Je-li  $\Delta z$  dostatečně malé, můžeme potenciální teplotu, hustotu a rychlost proudění v okolí vzduchové částice v hladině  $z_0 + \Delta z$  vyjádřit pomocí prvních členů Taylorova rozvoje

$$\theta(z_0 + \Delta z) = \theta(z_0) + \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_0 \Delta z \equiv \theta_0 + \theta'_0 \Delta z, \quad (8.11)$$

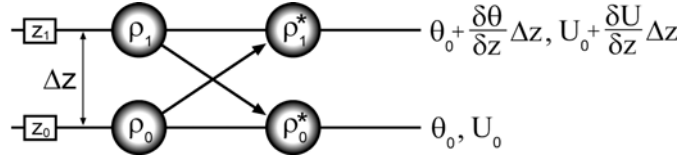
$$\rho(z_0 + \Delta z) = \rho(z_0) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_0 \Delta z \equiv \rho_0 - |\rho'_0| \Delta z, \quad (8.12)$$

$$U(z_0 + \Delta z) = U(z_0) + \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 \Delta z \equiv U_0 + U'_0 \Delta z. \quad (8.13)$$

Předpokládáme-li, že výměna poloh částic je adiabatická a tlak částic se přizpůsobuje okolnímu tlaku, vyplývá z Bernoulliovy rovnice (viz například [21]), že při takovém procesu se zachovává součet kinetické energie, potenciální energie a entalpie soustavy tvořené oběma vzduchovými částicemi.

Vypočteme nejprve, jak se změní výměnou polohy vzduchových částic jejich potenciální energie. Před výměnou je potenciální energie  $P$  rovna

$$P = g[\rho_0 z_0 + \rho_1(z_0 + \Delta z)] = g[\rho_0 z_0 + (\rho_0 - |\rho'_0|(z_0 + \Delta z)\Delta z)] = \\ = g[2\rho_0 z_0 + \rho_0 \Delta z - \Delta z |\rho'_0|(z_0 + \Delta z)]. \quad (8.14)$$



Obr. 8.1 Schématické znázornění vzájemné výměny poloh dvou vzduchových částic mezi hladinami  $z_1$  a  $z_2$

Vnímavý čtenář si jistě všiml, že index 0 vztahujeme k hladině  $z_0$  zatímco index 1 k hladině  $z_0 + \Delta z$  tak, jak je naznačeno na [obrázku 8.1](#). Abychom vyjádřili potenciální energie poté, co si částice vymění pozice, je nutné znát, jak se změní jejich hustoty. Z Poissonových rovnic napsaných pro vzduchové částice (index  $p$ ) a okolní vzduch (index  $e$ )

$$\theta_p = T_p \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p}, \quad \theta_e = T_e \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p},$$

stavových rovnic

$$p = \rho_p R T_p, \quad p = \rho_e R T_e$$

a platnosti výše uvedených předpokladů vyplývá, že

$$\theta_p \rho_p = \theta_e \rho_e. \quad (8.15)$$

Hustota vzduchové částice, která se z původní hladiny  $z_0$  přemístí do hladiny  $z_0 + \Delta z$ , je rovna

$$\rho_1^* = \frac{\theta_1 \rho_1}{\theta_0} = \frac{(\theta_0 + \theta'_0 \Delta z)(\rho_0 - |\rho'_0| \Delta z)}{\theta_0} = \rho_0 |\rho'_0| \Delta z + \frac{\rho_0 \theta'_0}{\theta_0} \Delta z, \quad (8.16)$$

kde jsme zanedbali člen obsahující  $(\Delta z)^2$ , protože je řádově menší než členy zbývající. To je také konzistentní s tím, že jsme uvažovali jen první členy Taylorova rozvoje ve vztazích (8.11) až (8.13). Vzduchová částice, která přejde z hladiny  $z_0 + \Delta z$  do hladiny  $z_0$  bude mít ve své nové poloze hustotu

$$\rho_0^* = \frac{\rho_0 \theta_0}{\theta_1} = \frac{\rho_0 \theta_0}{\theta_0 \left(1 + \frac{\theta'_0}{\theta_0} \Delta z\right)} = \rho_0 \left(1 - \frac{\theta'_0}{\theta_0} \Delta z\right), \quad (8.17)$$

kde jsme opět zanedbali nelineární členy a dále použili pravidel pro počítání s malými čísly. Konečně tedy můžeme pro potenciální energie vzduchových částic, poté co si vymění polohy, psát

$$\begin{aligned} P^* &= g \left[ \rho_1^* (z_0 + \Delta z) + \rho_0^* z \right] = \\ &= g \left[ \left( \rho_0 - |\rho'_0| \Delta z + \frac{\rho_0 \theta'_0}{\theta_0} \Delta z \right) (z_0 + \Delta z) + \rho_0 \left(1 - \frac{\theta'_0}{\theta_0}\right) z_0 \right] = \\ &= g \left[ 2\rho_0 z_0 + \rho_0 \Delta z - |\rho'_0| (z_0 + \Delta z) \Delta z + \frac{\rho_0 \theta'_0}{\theta_0} (\Delta z)^2 \right]. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Změna potenciální energie vyvolaná změnou polohy vzduchových částic je rovna

$$\Delta P = P^* - P = g \rho_0 \left( \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_0 (\Delta z)^2 = \rho_0 \omega_0^2 (\Delta z)^2. \quad (8.19)$$

Jednoduchým způsobem se můžeme přesvědčit, že entalpie soustavy obou částic se výměnou poloh obou částic nezmění, protože závisí jen na tlaku v okolí obou částic. Entalpie před výměnou poloh je totiž rovna

$$H = \rho_0 c_p T_0 + \rho_1 c_p T_1 = \frac{c_p}{R} (p_0 + p_1) \quad (8.20)$$

a po výměně

$$H^* = \rho_1^* c_p T_1^* + \rho_0^* c_p T_0^* = \frac{c_p}{R} (p_0 + p_1), \quad (8.21)$$

kde jsme využili stavové rovnice.

Věnujme nyní pozornost kinetické energii soustavy obou vzduchových částic, případně její změně. Zaměřme se nejprve na kinetickou energii spojenou s horizontálním pohybem obou částic. Za dodatečného předpokladu, že jsou pro kinetickou energii ve vrstvičce o tloušťce  $\Delta z$  podstatnější změny rychlosti proudění než změny hustoty, je kinetická energie před výměnou rovna

$$K_H = \frac{\rho_0}{2} [U_0^2 + (U_0^2 + U_0' \Delta z)^2] = \rho_0 \left[ U_0^2 + U_0 U_0' \Delta z + \frac{1}{2} (U_0')^2 (\Delta z)^2 \right]. \quad (8.22)$$

K výpočtu kinetické energie  $K_H^*$  spojené s horizontálním pohybem vzduchových částic po výměně jejich poloh je nutné znát nové horizontální rychlosti obou částic. Je-li  $U_0' > 0$ , je zřejmé, že vzduchová částice, která přejde z nižší hladiny do vyšší, bude urychlována, zatímco vzduchové částice, která se přemístí z vyšší hladiny do nižší, bude zpomalována. Dutton [4] zavádí předpoklad, že vzduchové částice nepřizpůsobují svojí horizontální rychlost rychlosti okolního vzduchu okamžitě, nýbrž rychlost vzduchové částice v nové poloze je rovna průměrné rychlosti proudění okolního vzduchu ve vrstvičce, kterou vzduchová částice při přemístění prošla. Podle tohoto předpokladu tedy bude mít vzduchová částice, která přejde z polohy  $z_0$  do pozice  $z_0 + \Delta z$ , horizontální rychlost

$$\frac{1}{2}(U_0 + U_0 + U_0' \Delta z) = U_0 + \frac{1}{2} U_0' \Delta z$$

a částice přemístěná z polohy  $z_0 + \Delta z$  do pozice v hladině  $z_0$  bude mít stejnou rychlost, neboť projde stejnou vrstvou vzduchu. Kinetická energie horizontálního pohybu po výměně obou vzduchových částic je tedy

$$K_H^* = \frac{\rho_0}{2} \left[ 2(U_0 + \frac{1}{2} U_0' \Delta z)^2 \right] = \rho_0 \left[ U_0' + U_0 U_0' \Delta z + (U_0')^2 \frac{(\Delta z)^2}{4} \right] \quad (8.23)$$

a změna této energie vyvolaná výměnou pozice vzduchových částic je rovna

$$\Delta K_H = K^* - K = -\rho_0 (U_0')^2 \frac{(\Delta z)^2}{4}. \quad (8.24)$$

Z posledního vztahu je patrné, že uvedená část kinetické energie po výměně pozice obou částic klesá.

Označme kinetickou energii spojenou s vertikálním pohybem obou částic před výměnou jejich poloh  $K_v$  a po výměně  $K_v^*$ . Podle Bernoulliovy rovnice, s přihlédnutím k (8.20) a (8.21), musí za výše uvedených předpokladů platit

$$K_v = K_v^* + \Delta P + \Delta K_H = K_v^* + \rho_0 \left[ \omega_0^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_0^2 \right] (\Delta z)^2. \quad (8.25)$$

Na tomto místě si uvědomme, co rozumíme stabilitou naší soustavy dvou vzduchových částic. Za stabilní situaci můžeme označit stav, při kterém výměna vertikálních poloh obou vzduchových částic způsobí pokles jejich kinetické energie. To vyžaduje, aby  $K_v^*$  nepřevyšovalo  $K_v$ . Docházíme tak k postačující podmínce stability

$$K_v^* - K_v = \rho_0 \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_0^2 - \omega_0^2 \right] (\Delta z)^2 \leq 0, \quad (8.26)$$

kteřou můžeme s přihlédnutím k definici Richardsonova čísla (8.1) psát jako  $Ri \geq 1/4$ . Naopak, nutnou podmínkou instability je nerovnost  $Ri < 1/4$ . Dostali jsme tedy stejné podmínky, jaké jsou předmětem tvrzení Milesova-Howardova teorému, které jsme odvodili v oddíle 8.1.

Před zveřejněním uvedeného teorému uváděli různí autoři na základě pozorování odlišné hodnoty kritického Richardsonova čísla, při kterých se v atmosféře objevují konvektivní a turbulentní pohyby vzduchu. Citujme tyto empirické výsledky, tak jak je uvádí Belinskij [24]:

Richardson	– 1,
Prandtl	– 1/2,
Taylor	– 1/4,
Tollmien	– 1/24,
Sverdrup	– 1/11.

## 9 STABILITA RAYLEIGHOVY-BÉNARDOVY KONVEKCE

V předchozích kapitolách jsme dosud studovali konvektivní vertikální pohyby v prostředí bez vnitřního tření (vazkosti) tekutiny. Pro rozvoj vertikálních pohybů pak byla rozhodující vzájemná souhra gravitačních a archimédovských vztlakových sil. V následující části textu vezmeme do úvahy rovněž viskozitu prostředí. Do pohybové rovnice ve vektorovém tvaru (2.1a) je pak třeba za sílu tření  $\mathbf{f}_r$  dosadit (viz například [2] nebo [4]).

$$\mathbf{f}_r = \frac{1}{\rho} \left[ \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \left( \lambda + \frac{1}{3} \mu \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]. \quad (9.1)$$

Ve složkovém vyjádření pak mají pohybové rovnice, kterým pro viskózní tekutinu říkáme Navierovy-Stokesovy, tvar

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} \right), \quad (9.2a)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} \right), \quad (9.2b)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g_a + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right), \quad (9.2c)$$

kde  $g_a$  představuje gravitační zrychlení a  $\sigma_{ij}$  jsou složky tenzoru napětí

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (9.3)$$

V uvedeném vyjádření označujeme složky rychlosti proudění  $u = v_1$ ,  $v = v_2$ ,  $w = v_3$  a osy  $x = x_1$ ,  $y = x_2$ ,  $z = x_3$ . Parametry  $\mu$  a  $\lambda$  postupně představují koeficient dynamické vazkosti a druhou vazkost. Z rovnic (9.2) je patrné, že neuvažujeme rotaci Země.



O tom, zda se ve vrstvě tekutiny, jejíž spodní vrstvu udržujeme teplejší než svrchní, a ve které se uplatňuje kromě viskozity i vedení tepla, rozvine konvekce, rozhoduje velikost takzvaného *Rayleighova čísla*  $Ra$ , přesněji řečeno, zda jeho velikost překročí kritickou hodnotu  $Ra_k$ . Poté hovoříme o *konvektivní instabilitě*. Rayleighovo číslo je definováno vztahem

$$Ra = \frac{\alpha g_a \bar{\gamma}}{\kappa \nu} H^4 \quad (9.4)$$

a jedná se tedy o bezrozměrný parametr, který vyjadřuje vztah mezi destabilizujícím vlivem vztlakových sil na jedné straně a stabilizujícím vlivem viskozity a vedení tepla v tekutině na straně druhé. Bližší podrobnosti o fyzikální interpretaci Rayleighova čísla uvádíme v poznámce 2. Ve vztahu (9.4) představuje  $H$  tloušťku studované vrstvy tekutiny a  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $\nu$  popisují její fyzikální vlastnosti. Jmenovitě je  $\alpha$  koeficient teplotní roztažnosti,  $\kappa$  koeficient teplotní vodivosti a  $\nu$  kinematická vazkost. Parametr  $\bar{\gamma}$  je teplotní gradient ve vrstvě  $H$ , tedy  $\bar{\gamma} = -dT/dz = (T_0 - T_1)/H$ , kde  $T_0$  představuje teplotu spodní a  $T_1$  horní vrstvy vzduchu (pro konvekci je nutné, nikoliv postačující, aby  $T_0 > T_1$ ).

Uvedené číslo nese pojmenování po lordu Rayleighovi, který naznačený problém konvekce řešil poprvé kvantitativně v roce 1916, i když ještě před ním jej z hlediska experimentálního studoval Bénard v roce 1900<sup>\*)</sup>. Z tohoto historického důvodu často místo o konvektivní instabilitě hovoříme o *Rayleighově-Bénardově instabilitě*.

Kritická hodnota Rayleighova čísla  $Ra_k$  závisí na uspořádání modelu či experimentu, zejména na okrajových podmínkách. V následujícím textu odvodíme vztah pro kritické Rayleighovo číslo pro tekutinu, jejíž spodní i horní hranice jsou tvořeny volnou hladinou. Mohlo by se zdát, že uvažování spodní hranice tekutiny jako volné hladiny je poněkud nefyzikální, ale k takovému uspořádání nás vedou historické důvody (použil jej právě Rayleigh). Navíc bylo ukázáno [25], že volnou spodní hladinu tekutiny lze modelovat i experimentálně pomocí vrstvy tekutiny s mnohem menší viskozitou než jakou má tekutina ve vrstvě  $H$ .

V této kapitole také použijeme techniky často užívané v geofyzikální hydrodynamice, a to postupu, kdy skutečné proměnné převedeme na jejich bezrozměrné tvary. Z tohoto důvodu budeme označovat ve zbývajících částech této kapitoly skutečné proměnné dolním indexem „\*“, tedy  $\mathbf{v}_*$ ,  $p_*$ , atd.

---

<sup>\*)</sup> Konvektivní instabilita byla poprvé popsána Jamesem Thomsonem (bratrem lorda Kelvina) v roce 1882.

Uvažujme tedy vrstvu tekutiny o tloušťce  $H$ , jejíž spodní hladinu umístěnou ve výšce  $z_* = 0$  udržujeme při stálé teplotě  $T_{*0}$ , zatímco horní volnou hladinu ve výšce  $z_* = H$  udržujeme při stálé teplotě  $T_{*1}$ . Uspořádání modelu je znázorněno na [obrázku 9.1](#). Problematiku Rayleighovy-Bénardovy konvekce v prvním přiblížení dobře popisují hydrodynamické rovnice v Boussinesquově aproximaci. Ačkoliv v odborné literatuře existuje několik mírně odlišných verzí této aproximace (viz například [8,11,26,27]), jejich společným rysem je skutečnost, že hustotu tekutiny považujeme za nepříliš proměnnou kolem její referenční hodnoty  $\rho_{*0}$ , kromě členu v pohybových rovnicích, ve kterém se vyskytuje u gravitačního zrychlení. A dále předpokládáme, že rovnici kontinuity uvažujeme ve tvaru platném pro nestlačitelnou tekutinu. Výchozí hydrodynamické rovnice v Boussinesquově aproximaci potom mají tvar

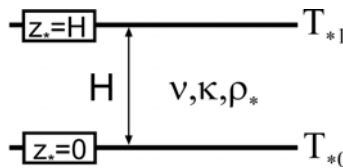
$$\rho_* = \rho_{*0} [1 - \alpha(T_* - T_{*0})], \quad (9.5a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_*}{\partial t_*} + (\mathbf{v}_* \cdot \nabla \mathbf{v}_*) \mathbf{v}_* = -\nabla \left( \frac{p_*}{\rho_0} + g_a z_* \right) + \alpha g_a (T_* - T_{*0}) \mathbf{k} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}_*, \quad (9.5b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_* = 0, \quad (9.5c)$$

$$\frac{\partial T_*}{\partial t_*} + \mathbf{v}_* \cdot \nabla T_* = \kappa \nabla^2 T_*. \quad (9.5d)$$

Abychom se vyhnuli dvojznačnosti, připomínáme, že v této kapitole  $\alpha$  označuje koeficient teplotní roztažnosti, nikoliv měrný objem. Vektor  $\mathbf{k}$  představuje jednotkový vertikálně orientovaný vektor ve směru souřadnicové osy  $z_*$ .



Obr. 9.1 Schématické uspořádání modelu pro studium Rayleighovy-Bénardovy konvekce.

Základní stav necht' odpovídá klidovému stavu, to znamená

$$\bar{\mathbf{v}}_* = 0, \quad \bar{T}_* = T_{*0} - \bar{\gamma} z_*, \quad \bar{p}_* = p_{*0} - g_a \rho_{*0} \left( z_* - \frac{1}{2} \alpha \bar{\gamma} z_*^2 \right), \quad (9.6)$$

kde průměrný teplotní gradient ve vrstvě  $H$  v klidové stavu  $\bar{\gamma} = -d\bar{T}_*/dz_*$  můžeme vyjádřit jako  $\bar{\gamma} = (T_{*0} - T_{*1})/H$ . Na tento základní stav nechť jsou dále superponovány poruchy v poli rychlosti proudění, teploty a tlaku  $\mathbf{v}'_*(\mathbf{x}_*, t_*)$ ,  $T'_*(\mathbf{x}_*, t_*)$  a  $p'_*(\mathbf{x}_*, t_*)$ . Výsledný stav tedy můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{v}_* = \mathbf{v}'_*(\mathbf{x}_*, t_*), \quad T_* = \bar{T}_*(z_*) + T'_*(\mathbf{x}_*, t_*), \quad p_* = \bar{p}_* + p'_*(\mathbf{x}_*, t_*). \quad (9.7)$$

Obvyklým postupem, kdy výchozí rovnice (9.5) napíšeme pro základní stav, poté pro výsledný stav, a tyto rovnice linearizujeme vzhledem k perturbacím (poruchám), dostaneme pohybovou rovnici, rovnici kontinuity a termodynamickou rovnici pro poruchové veličiny

$$\frac{\partial \mathbf{v}'_*}{\partial t_*} = -\frac{1}{\rho_{*0}} \nabla p'_* + \alpha g_a T'_* \mathbf{k} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}'_*, \quad (9.8a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}'_* = 0, \quad (9.8b)$$

$$\frac{\partial T'_*}{\partial t_*} - \bar{\gamma} w'_* = \kappa \nabla^2 T'_*. \quad (9.8c)$$

Poznámka 2: známe-li zákonitosti, kterými se řídí náš model konvekce, můžeme dát Rayleighovu číslu přesnější interpretaci [11]. Je-li pro rozvoj vertikálních pohybů v tekutině limitujícím faktorem viskozita prostředí, můžeme z rovnováhy mezi vztlakovou silou  $-g_a \rho'_*/\rho_{*0} \sim \alpha g_a \Delta T_*$  a silou viskózního tření  $\nu \partial^2 w_*/\partial z_*^2 \sim \nu w_*/H^2$ , odhadnout rychlost vertikálních pohybů při konvekci:

$$\alpha g_a \Delta T_* \approx \frac{\nu w_*}{H^2} \Rightarrow w_* \approx \frac{\alpha g_a \Delta T_*}{\nu} H^2.$$

Tok tepla zprostředkovaný samotnou konvekci přibližně vyjádříme jako  $\overline{w'_* T'_*} \sim w_* \Delta T_* \approx \alpha g_a \Delta T_*^2 H^2 / \nu$ , zatímco pro tok tepla vedení můžeme psát  $\kappa \partial T_*/\partial z_* \sim \kappa \Delta T_*/H$ . Poměr posledních dvou toků tepla, to znamená poměr množství tepla přeneseného konvekci ku množství tepla zprostředkovaného vedením, je Rayleighovo číslo

$$Ra = \frac{\alpha g_a \Delta T_*^2 H^2}{\frac{\nu}{H} \kappa \Delta T_*} = \frac{\alpha g_a \Delta T_*}{\nu \kappa} H^3 = \frac{\alpha g_a \bar{\gamma}}{\nu \kappa} H^4,$$

kde jsme využili skutečnosti, že  $\bar{\gamma} = \Delta T_*/H$ . Ve výsledku jsme tedy dostali stejnou formuli jako (9.4), kterou jsme Rayleighovo číslo definovali. Tím jsme objasnili jeho fyzikální význam.

Po cimrmanovském kroku stranou se vraťme zpět k rovnicím (9.8). Podle zmíněného postupu do nich zavedme bezrozměrné proměnné vztahy

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}_*}{H}, \quad t = \frac{\kappa t_*}{H^2}, \quad \mathbf{v} = \frac{H \mathbf{v}'_*}{\kappa},$$

$$T = \frac{T'_*}{\bar{\gamma} H}, \quad p = \frac{H^2 p'_*}{\rho_{*0} \kappa^2}. \quad (9.9)$$

Poté rovnice (9.8) přejdou na tvar

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + Ra Pr T \mathbf{k} + Pr \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (9.10a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (9.10b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - w = \nabla T, \quad (9.10c)$$

kde

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (9.11)$$

je *Prandtlovo číslo*.

Rovnice (9.10) se budeme snažit upravit do takového tvaru, jehož řešení snáze nalezneme; a tímto postupem odvodíme rovnici pro vertikální rychlosti  $w$ . Aplikace operátoru rotace ( $\nabla \times$ ) na rovnici (9.10a) vede na vztah

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = Ra Pr (\nabla T \times \mathbf{k}) + Pr \nabla^2 \boldsymbol{\xi}, \quad (9.12)$$

kde  $\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{v}$  značí bezrozměrný vektor vorticity. Opětovná aplikace operátoru rotace na poslední rovnici dává

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \mathbf{v}) = Ra Pr \left( \nabla^2 T \mathbf{k} - \nabla \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Pr \nabla^4 \mathbf{v}, \quad (9.13)$$

kde jsme využili rovnice kontinuity (9.10b). Vertikální složka rovnice (9.13) má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 w) = Ra Pr \nabla_H^2 T + Pr \nabla^4 w, \quad (9.14)$$

kde  $\nabla_H^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  značí horizontální laplacián. Eliminace bezrozměrné teploty  $T$  v poslední rovnici a rovnici (9.10c) vede na rovnici pro vertikální rychlost, ve které se nevyskytují žádné neznámé proměnné:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right)\left(\frac{1}{Pr}\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right)\nabla^2 w = Ra \nabla_H w. \quad (9.15a)$$

Podobně lze ukázat [8], že bezrozměrná teplota  $T$  splňuje formálně stejnou rovnici

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right)\left(\frac{1}{Pr}\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right)\nabla^2 T = Ra \nabla_H T. \quad (9.15b)$$

Abychom mohli poslední rovnice řešit, je třeba formulovat okrajové podmínky. Tvoří-li obě hranice tekutiny volné hladiny, které mají neproměnné teploty, nabývají okrajové podmínky tvaru

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = T = 0, \quad \text{na volných hladinách } z = 0, 1. \quad (9.16)$$

Podrobnější pojednání o odvození okrajových podmínek uvádíme pro zvědavé čtenáře v poznámce 3.

Rayleigh hledal řešení rovnic (9.15) splňující okrajové podmínky (9.16) ve formě normálních modů

$$\begin{aligned} w &= \hat{w}(z)f(x, y)e^{st}, \\ T &= \hat{T}(z)f(x, y)e^{st}, \end{aligned} \quad (9.17)$$

kde  $s$  může být komplexní číslo  $s = s_r + is_i$ . Právě podle toho, jaké je  $s$ , usuzujeme na stabilitu. Ze vztahu (9.10c) po dosazení za  $w$  a  $T$  pomocí (9.17) vyplývá, že

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \nabla_H - s\right)f\hat{T} = -f\hat{w}, \quad (9.18)$$

tedy

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k_H^2 - s\right)\hat{T} = -\hat{w}. \quad (9.19)$$

Pro funkci  $f$  platí

$$\nabla_H f + k_H^2 f = 0, \quad (9.20)$$

kde  $k_H^2$  je libovolná separační konstanta, které můžeme snadno dát následující interpretaci. Poslední rovnice totiž představuje redukovanou vlnovou

rovnici, zvanou také *Helmholtzova rovnice*, a konstantu  $k_H$  tedy můžeme považovat za horizontální vlnové číslo.

Rovnice (9.15a) po dosazení řešení ve tvaru (9.17) přejde do podoby

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k_H^2\right)\left(\frac{d^2}{dz^2} - k_H^2 - s\right)\left(\frac{d^2}{dz^2} - k_H^2 - \frac{s}{Pr}\right)\hat{w} = -k_H^2 Ra \hat{w} \quad (9.21)$$

a okrajové podmínky (9.16) nabývají tvaru

$$\hat{w} = \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} = \hat{T} = 0, \quad \text{na volných hladinách } z = 0, 1, \quad (9.22)$$

kde  $\hat{T}$  můžeme dosazením (9.17) do (9.14) určit jako

$$\hat{T} = \frac{1}{k_H^2 Ra} \cdot \left(\frac{d^2}{dz^2} - k_H^2\right)\left(\frac{d^2}{dz^2} - k_H^2 - \frac{s}{Pr}\right)\hat{w}. \quad (9.24)$$

Nyní jsme postavení před problém řešit rovnici (9.21) šestého řádu s šesti okrajovými podmínkami (9.22). Jedná se v podstatě o problém určit vlastní čísla  $s_n$  a jim odpovídající vlastní funkce  $\hat{w}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , což obecně není triviální záležitost. Zastavme se proto nejprve u některých obecnějších postřehů týkajících se stability. Lze ukázat (viz [8] nebo poznámka 4), že v tomto případě platí takzvaný princip změny stability. Pro dané  $Ra$  je konvekce instabilní (normální módy  $\hat{w}_n$ , resp.  $\hat{T}_n$  (9.17) zvětšují s časem svou velikost), jestliže  $s_r > 0$  pro jakýkoliv mód, a stabilní, jestliže  $s_r \leq 0$  pro všechny módy. Tedy kritická hodnota Rayleighovy čísla  $Ra_k$  je taková, pro kterou je  $s_r(k_H^2, Ra) > 0$  pro nějaké  $k_H^2$ , kdekoliv je  $Ra > Ra_k$ , a  $s_r(k_H^2, Ra) \leq 0$  pro všechna  $k_H^2$ , kdekoliv je  $Ra \leq Ra_k$ . Příklad  $s=0$  vytyčuje hranici stability.

Vraťme se k řešení rovnice (9.21) s hraničními podmínkami (9.22). Řešení je představováno množinou vlastních funkcí

$$\hat{w}(z) = \hat{w}_n(z) = \sin n\pi z, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9.25)$$

kterým odpovídají vlastní čísla  $s_n$ . Z (9.25) a (9.21) plyne, že

$$(n^2 \pi^2 + k_H^2)(n^2 \pi^2 + k_H^2 + s_n) \left( n^2 \pi^2 + k_H^2 + \frac{s_n}{Pr} \right) = k_H^2 Ra. \quad (9.26)$$

Odsud pro  $s_n$  dostáváme

$$s_n = -\frac{1}{2}(1+Pr)(n^2\pi^2 + k_H^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(Pr-1)^2(n^2\pi^2 + k_H^2)^2 + \frac{k_H^2 Ra Pr}{n^2\pi^2 + k_H^2}}. \quad (9.27)$$

Z posledního vztahu je vidět, že z nerovnosti  $Ra < 0$  opravdu vyplývá, že reálná část  $s_n$  je menší než nula, a  $Ra > 0$  implikuje  $s_n = 0$ . Pro hranici stability  $s_n = 0$  z (9.26) máme

$$Ra_n(k_H) = \frac{(n^2\pi^2 + k_H^2)^3}{k_H^2}, \quad (9.28)$$

kde jsme jednotlivým Rayleighovým číslům ze zřejmých důvodů přiřadili index  $n$ ;  $Ra_1 < Ra_2 < \dots$ . Závislost  $Ra_1$  na horizontálním vlnovém čísle je znázorněna na [obrázku 9.2](#). Proloženou křivku můžeme nazvat marginální nebo hraniční, protože od sebe odděluje v rovině  $(k_H^2, Ra)$  stabilní a instabilní módy (9.17). Minimum křivky přísluší kritické hodnotě Rayleighova čísla a jemu odpovídá hodnota horizontálního vlnového čísla označme  $k_{Hk}$ . Vypočtěme obě kritické hodnoty – hledejme tedy minimum  $Ra_1(k_H^2)$ , a proto položíme

$$\frac{dRa_1}{dk_H^2} = \frac{(2k_H^2 - \pi^2)(\pi^2 + k_H^2)^2}{k_H^4} = 0.$$

Odsud vyplývá, že minimum nastává pro

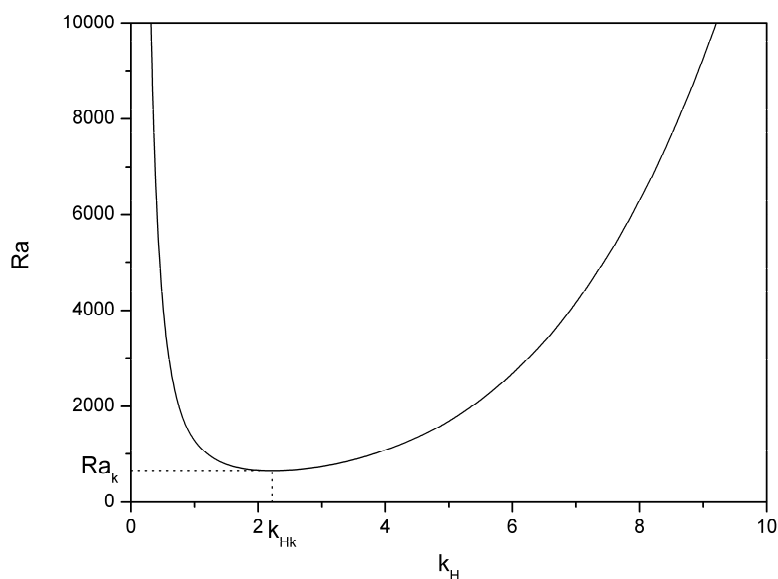
$$k_H = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \equiv k_{Hk}, \quad (9.29)$$

a této hodnotě odpovídá kritická hodnota Rayleighova čísla

$$Ra_k = \min_{-\infty < k_H < \infty} Ra_1(k_H) = \frac{27\pi^4}{4} \doteq 657,5; \quad (9.30)$$

kritická hodnota  $k_{Hk}$  vychází numericky přibližně 2,221. Poznamenejme, že teoreticky odvozená hodnota  $Ra_k$  byla poměrně uspokojivě potvrzena i experimentálně (viz například [\[25\]](#)). Vypočtěme ještě pro zajímavost horizontální vlnovou délku  $L_{Hk}$  spojenou s kritickým vlnovým číslem. V bezrozměrných proměnných je  $L_{Hk} = 2\pi/k_{Hk} = 2^{3/2} \doteq 2,83$ . Uvědomíme-li si, že jsme bezrozměrné proměnné zavedli prostřednictvím vztahů (9.9), vychází pro skutečnou vlnovou délku  $L_{*Hk} = 2^{3/2} H \doteq 2,83H$ .

Jak získané výsledky interpretovat? Z obrázku 9.2 i provedeného odvození je zřejmé, že pro  $Ra < Ra_k$  jsou všechny mody (9.17) stabilní, zatímco při  $Ra > Ra_k$  se objevuje instabilita. Jestliže Rayleighovo číslo nepatrně překročí kritickou hodnotu  $Ra_k$ , objeví se instabilní mod se zvětšující se amplitudou a skutečnou vlnovou délkou o velikosti  $2^{3/2}H$ . Na tomto místě je třeba zdůraznit, že převyšuje-li  $Ra$  jen nepatrně svou kritickou hodnotu, je instabilní jen mod s  $n = 1$ , zatímco ostatní jsou stabilní.



Obr. 9.2 Závislost Rayleighova čísla  $Ra \equiv Ra_1$  na horizontálním vlnovém čísle. V grafu je vyznačena kritická hodnota Rayleighova čísla  $Ra_k$ .

Popsaný typ instability nazýváme *konvektivní instabilitou*<sup>\*)</sup>, popřípadě *Rayleighovou-Bénardovou instabilitou*, někdy též *Rayleighovou-Bénardovou konvekcí*.

Za povšimnutí ještě stojí, že kritická hodnota Rayleighova čísla nezávisí na fyzikálních vlastnostech tekutiny, konkrétně na  $\nu$  ani na  $\kappa$ , a tedy ani na Prandtlově čísle  $Pr$ . Teoretické výpočty i experimenty však ukazují, že závisí na zvolených okrajových podmínkách, zda horní, popřípadě dolní hranice

<sup>\*)</sup> V meteorologii bývá jako konvektivní instabilita označována také situace, kdy  $\partial\theta_{av}/\partial z < 0$  alespoň někde nad tzv. výstupnou kondenzační hladinou;  $\theta_{av}$  označuje adiabatickou vlhkou teplotu. Větší podrobnosti viz například [5, 27].



jsou volné, nebo pevné. Kritické hodnoty  $Ra_k$  a  $k_{Hk}$  jsou pro různé konfigurace okrajových podmínek uvedeny v [tabulce 9.1](#)

Tab.9.1 Kritické hodnoty Rayleighova čísla  $Ra_k$  a horizontálního vlnového čísla  $k_{Hk}$  v závislosti na různých okrajových podmínkách.

horní	hranice	volná	volná	pevná
dolní		volná	pevná	pevná
$Ra_k$		657,5	1 101	1 708
$k_{Hk}$		2,221	2,682	3,117

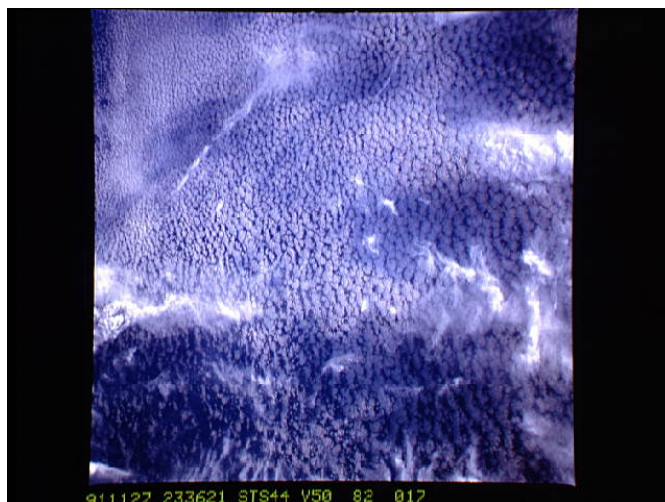
Popsaným lineárním postupem můžeme dobře nalézt velikost kritické hodnoty Rayleighova čísla a velikost konvektivních útvarů prostřednictvím  $k_{Hk}$ , ovšem konkrétní tvar konvektivních buněk, tj. konkrétní podobu funkce  $f$  jako řešení Helmholtzovy rovnice (9.20), není možné tímto přístupem stanovit. Bénard ve svém původním experimentu v roce 1900 pozoroval šestiúhelníkové buňky podobné medovým plástům (viz [obrázek 9.3](#)). Dnes



Obr. 9.3 Konvektivní buňky pozorované při Bénardově-Marangoniho konvekci.

panuje názor, že útvary, které Bénard pozoroval, nebyly výsledkem konvektivních pohybů, ale gradientů povrchového napětí způsobené změnami teploty na volné horní hranici tenké vrstvy tekutiny [8,28]. Jevu, kdy Rayleighovu-Bénardovu konvekci zobecníme právě o možnost zmíněného proměnlivého povrchového napětí s teplotou horní volné hranice, říkáme

*Marangoniho efekt* [16]. Někteří autoři v tomto případě hovoří přímo o *Marangoniho* nebo *Bénardově-Marangoniho konvekci* [22,23]. Preferovaným tvarem konvektivních útvarů jsou v tomto případě skutečně šestiúhelníkové konvektivní buňky. Ale vraťme se zpět k Rayleighově-Bénardově konvekci. Experimenty i nelineární teorie potvrzují výskyt celé řady konvektivních útvarů. Například při mírně nadkritické hodnotě Rayleighova čísla se ukazují jako stabilní dvourozměrné konvektivní válečky v případě vertikální asymetrie experimentu, zatímco při dodržení vertikální symetrie experimentu jsou upřednostňovaným útvarem šestiúhelníkové konvektivní buňky. V závislosti na velikosti Rayleighova a Prandtlova čísla byly pozorovány konvektivní útvary různých tvarů od již zmíněných konvektivních válečků a šestiúhelníkových buněk, přes konvektivní bubliny odtrhávající se od spodní hranice více či méně pravidelně, až po časově proměnné proudění turbulentního charakteru. Na [obrázku 9.4](#) je



Obr. 9.4 Družicový snímek konvektivní oblačnosti v zemské atmosféře

na družicovém snímku dobře zachycena oblačnost vytvořená konvekcí v zemské atmosféře. Uvědomme si, že formování takovéto oblačnosti je v atmosféře doprovázeno dalšími vlivy, které nebyly v naší použité teorii zachyceny. Především je to uvolňování latentního tepla při kondenzaci vodní páry. Patrně i tento efekt má za následek, že pozorované horizontální měřítko konvektivních útvarů leží v rozmezí deseti až padesátinásobku tloušťky vrstvy, ve které se konvekce odehrává, což není v úplném souladu se závěry teoretických úvah. Jistě zajímavým zjištěním je skutečnost, že kapalina uvnitř mnohoúhelníkovitých konvektivních buněk stoupá, zatímco

plyn klesá [8], což je vysvětlováno různou závislostí viskozity kapalin a plynů na teplotě (viskozita typické tekutiny s rostoucí teplotou klesá, zatímco u typického plynu je tomu naopak). Typická hodnota Rayleighova čísla v planetární mezní vrstvě atmosféry je řádově  $10^{18}$  [28], může zde však dosahovat hodnot  $10^{19}$  až  $10^{22}$  [29], což značně převyšuje kritickou hodnotu tohoto čísla, a to o tolik, že konvekce má převážně turbulentní charakter.

Poznámka 3: zastavme se podrobněji u formulace okrajových podmínek (9.22). Předně podmínka  $\hat{T} = 0$  vyplývá z předpokladu, že hranice tekutiny jsou dokonalými vodiči tepla. Okrajové podmínky na volných hladinách jsou dány tím, že perturbace složek napětí jsou zde nulové. Další odvození provedeme pro horní volnou hladinu s tím, že pro spodní volnou hladinu postupujeme analogicky. Rovnice volné horní hladiny tekutiny můžeme vyjádřit jako

$$z_* = H + \zeta'_*(x_*, y_*, t_*)$$

a pro vnější normálu k této ploše platí

$$\mathbf{n} = \frac{\left( -\frac{\partial \zeta'_*}{\partial x_*}, -\frac{\partial \zeta'_*}{\partial y_*}, 1 \right)}{\sqrt{1 + (\nabla \zeta'_*)^2}} = \mathbf{k} - \nabla \zeta'_*,$$

kde jsme v posledním vztahu při přechodu k výrazu stojícímu zcela vpravo zanedbali členy řádu  $O((\nabla \zeta'_*)^2)$  a menší. Dále normálová složka napětí na hladině deformované konvekci musí být rovna své hodnotě v neperturovaném tvaru (ve stavu bez konvekce), tzn.  $-p_{*1} = -\bar{p}_*(H)$ . Tedy

$$\begin{aligned} -p_{*1} &= \sigma_{*ij} n_i n_j = -\bar{p}_*(z_*) - p'_* + \mu \left( \frac{\partial v_{*i}}{\partial x_{*j}} + \frac{\partial v_{*j}}{\partial x_{*i}} \right) n_i n_j + \left( \lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v}'_* \quad \text{pro } z_* = H + \zeta'_* \\ &= -\bar{p}_*(H) - \frac{d\bar{p}_*}{dz_*} \zeta'_* - p'_* + 2\mu \frac{\partial w'_*}{\partial z_*} + \left( \lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v}'_* \quad \text{pro } z_* = H, \end{aligned}$$

kde jsme v rámci lineárního přístupu vztáhli okrajovou podmínku v druhém řádku přímo k hladině v neporušeném stavu a provedli lineárizaci. Například

$$\bar{p}_*(H + \zeta'_*) = \bar{p}_*(d) + \left. \frac{d\bar{p}_*}{dz_*} \right|_{z_*=H}$$

až na veličiny řádu  $O(\zeta'^2_*)$  a menší. Dále je zřejmé, že

$$\bar{p}_*(H) = p_{*1}, \quad \text{a} \quad \frac{d\bar{p}_*}{dz_*} = -g_a \rho_*$$

a pro perturbaci volné hladiny máme

$$\zeta'_* = \frac{1}{g\rho_{*1}} \left[ p'_* - 2\mu \frac{\partial w'_*}{\partial z_*} - \left( \lambda - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v}'_* \right] \quad \text{pro } z_* = H,$$

což přetřansformováno do bezrozměrných proměnných prostřednictvím vztahů (9.9) dává

$$\zeta = \frac{\zeta'_*}{H} = \frac{\alpha\bar{\gamma}H\rho_{*0}}{Ra\rho_{*1}} \left[ \frac{p}{Pr} - 2\frac{\partial w}{\partial z} + \left( \frac{2}{3} - \frac{\lambda}{\mu} \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right] \quad \text{pro } z = 1.$$

Vezmeme-li v úvahu, že při Boussinesquově aproximaci je  $\alpha\bar{\gamma}H = (\rho_{*1} - \rho_{*0})/\rho_{*0} \ll 1$ , můžeme poslední rovnici pro perturbaci volné hladiny zjednodušit a položit

$$\zeta = 0.$$

Zcela přesná (nelineární) kinematická okrajová podmínka je

$$w = \frac{d\zeta}{dt} \quad \text{pro } z = 1 + \zeta$$

a její lineárizovaná verze má s přihlédnutím k výše provedeným úvahám tvar

$$w = 0 \quad \text{pro } z = 1. \quad (*)$$

Tím máme dokázány dvě třetiny okrajových podmínek (9.16) a zbývá ukázat, že na volných hranicích je i  $\partial^2 w / \partial z^2 = 0$ . Fakt, že na volných hranicích tekutiny je tangenciální napětí rovno nule, tzn.  $\sigma_{*ij}n_j t_{ki} = 0$ ,  $k=1, 2$ , vede na rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{pro } z = 1,$$

odkud s přihlédnutím k (\*) snadno vyplývá, že

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{pro } z = 1.$$

Poslední vztah po aplikaci v rovnici kontinuity (9.10b) vede přímo na dříve uvedenou okrajovou podmínku

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) = 0 \quad \text{pro } z = 1.$$

Naprosto stejným postupem odvodíme, že okrajové podmínky i pro spodní volnou hladinu  $z = 0$ . Pro zajímavost si všimněme, že na volných hranicích vymizí i vertikální gradient vertikální složky vorticity  $\xi_3$ :

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$$

Poznámka 4: objasňeme princip změny stability při Rayleighově-Bénardově konvekci, zejména skutečnost, že pro hraničně (marginálně) stabilní mod s  $s_r = 0$  je  $s_i = 0$ . Vynásobíme rovnici (9.19) veličinou  $\hat{T}^*$  komplexně sdruženou s amplitudou  $\hat{T}$  a výsledný vztah integrujeme od  $z = 0$  do  $z = 1$ :

$$\int_0^1 \hat{T}^* \left( \frac{d^2}{dz^2} - k_H^2 - s \right) \hat{T} dz = \int_0^1 \hat{w} \hat{T}^* dz .$$

Integrací per partes získáme

$$-\int_0^1 \left[ \left| \frac{d\hat{T}}{dz} \right|^2 + (k_H^2 + s) |\hat{T}|^2 \right] dz + \left[ \hat{T}^* \frac{d\hat{T}}{dz} \right]_0^1 = -\int_0^1 \hat{w} \hat{T}^* dz .$$

Ovšem na hranicích tekutiny perturbace v poli teploty vymizí, tzn.  $\hat{T} = \hat{T}^* = 0$  a proto se poslední rovnice redukuje na

$$\int_0^1 \left[ \left| \frac{d\hat{T}}{dz} \right|^2 + (k_H^2 + s) |\hat{T}|^2 \right] dz = \int_0^1 \hat{w} \hat{T}^* dz ,$$

což můžeme zapsat jako

$$sI_0 + I_1 = \int_0^1 \hat{w} \hat{T}^* dz , \quad (**)$$

kde

$$I_0 = \int_0^1 |\hat{T}|^2 dz, \quad I_1 = \int_0^1 \left( \left| \frac{d\hat{T}}{dz} \right|^2 + k_H^2 |\hat{T}|^2 \right) dz .$$

Dosaďme nyní do vertikální komponenty rovnice vorticity (9.14) řešení ve tvaru (9.17). Získáme rovnici podobnou (9.21):

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - k_H^2 \right) \left( \frac{d^2}{dz^2} - k_H^2 - \frac{s}{Pr} \right) \hat{w} = k_H^2 Ra \hat{T} .$$

Vynásobme nyní poslední rovnici komplexně sdruženou veličinou k  $\hat{w}$ , tzn.  $\hat{w}^*$ , a výsledek integrujeme od  $z = 0$  do  $z = 1$ . Pak dostáváme

$$\int_0^1 \hat{w}^* \left( \frac{d^2}{dz^2} - k_H^2 \right) \left( \frac{d^2}{dz^2} - k_H^2 - \frac{s}{Pr} \right) \hat{w} dz = k_H^2 Ra \int_0^1 \hat{w}^* \hat{T} dz$$

a integrací per partes máme

$$\int_0^1 \left[ \left| \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} \right|^2 + \left( 2k_H^2 + \frac{s}{Pr} \right) \left| \frac{d\hat{w}}{dz} \right|^2 + k_H^2 \left( k_H^2 + \frac{s}{Pr} \right) |\hat{w}|^2 \right] dz +$$

$$+ \left[ \hat{w}^* \frac{d^3 \hat{w}}{dz^3} - \frac{d\hat{w}^*}{dz} \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} - \left( 2k_H^2 + \frac{s}{Pr} \right) \hat{w}^* \frac{d\hat{w}}{dz} \right]_0^1 = k_H^2 Ra \int_0^1 \hat{w}^* \hat{T} dz.$$

Ale podle okrajových podmínek (9.22) na volných hranicích tekutiny je  $\hat{w} = d^2 \hat{w} / dz^2 = 0$  a poslední rovnice se tedy zjednoduší na

$$J_2 + \frac{sJ_1}{Pr} = k_H^2 Ra \int_0^1 \hat{w}^* \hat{T} dz, \quad (***)$$

kde

$$J_1 = \int_0^1 \left( \left| \frac{d\hat{w}}{dz} \right|^2 + k_H^2 |\hat{w}|^2 \right) dz, \quad J_2 = \int_0^1 \left( \left| \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} \right|^2 + 2k_H^2 \left| \frac{d\hat{w}}{dz} \right|^2 + k_H^4 |\hat{w}|^2 \right) dz.$$

Všimněme si, že integrály  $I_0$ ,  $I_1$ ,  $J_1$  a  $J_2$  jsou kladné. Odečteme-li od rovnice (\*\*\*) vynásobené  $k_H^2 Ra$  rovnici komplexně sdruženou s rovnicí (\*\*\*), dostaneme vztah

$$k_H^2 Ra I_1 - J_2 + s k_H^2 Ra I_0 - \frac{s^* J_1}{Pr} = 0,$$

ze kterého vyčleníme reálnou

$$s_r \left( k_H^2 Ra I_0 - \frac{J_1}{Pr} \right) + k_H^2 Ra I_1 - J_2 = 0 \quad (\diamond)$$

a imaginární část

$$s_i \left( k_H^2 Ra I_0 + \frac{J_1}{Pr} \right) = 0. \quad (\diamond\diamond)$$

Z rovnice ( $\diamond$ ) je zřejmé, že pokud je  $Ra < 0$ , musí být  $s_r < 0$ . Tomu koneckonců odpovídá fyzikální situace, kdy ve studované vrstvě tekutiny leží její teplejší vrstvy nad chladnějšími, což představuje stabilní situaci. Z rovnice ( $\diamond\diamond$ ) vyplývá, že je-li  $Ra > 0$ , musí být  $s_i = 0$ . Tím jsme dokázali platnost principu změny stability pro náš studovaný případ konvekce.

## 10 STABILITNÍ KRITÉRIA VYPLÝVAJÍCÍ Z RAYLEIGHOVY ROVNICE

V této části knihy se vrátíme k rovnicím odvozeným v kapitole 3, konkrétně k Rayleighově rovnici (3.6), a odvodíme z ní některé závěry plynoucí pro stabilitu proudění dokonale neviskosní tekutiny splňující zmíněnou rovnici. Předně si všimněme, že Rayleighova rovnice neobsahuje člen s gravitačním resp. tíhovým zrychlením, ani člen popisující archimédovské vztlakové síly. Proto můžeme v rovnici (3.6) nahradit derivace  $d^2\hat{\psi}/dz^2$ , resp.  $d^2\bar{u}/dz^2$  derivacemi  $d^2\hat{\psi}/dy^2$ , resp.  $d^2\bar{u}/dy^2$ . To samozřejmě předpokládá, že bychom museli uvažovat i proudovou funkci nikoliv ve tvaru podle vztahu (3.1), ale s amplitudou  $\hat{\psi}$  závislou na souřadnici  $y$ , to znamená  $\psi(x, y, t) = \Re\{\hat{\psi}(y)e^{ik(x-ct)}\}$ . Je tedy lhostejné, budeme-li pracovat s tekutinou v rovině  $xz$ , nebo  $xy$ .

Vyberme si první z možností a zkoumejme vlastnosti Rayleighovy rovnice ve tvaru

$$(\bar{u} - c) \left( \frac{d^2\hat{\psi}}{dz^2} - k^2\hat{\psi} \right) - \frac{d^2\bar{u}}{dz^2} \hat{\psi} = 0 \quad (10.1)$$

s okrajovými podmínkami

$$k\hat{\psi} = 0 \quad \text{pro} \quad z = z_1 \text{ a } z = z_2. \quad (10.2)$$

Povšimněme si nejprve některých obecnějších skutečností, které se týkají Rayleighovy rovnice. Předně si připomeňme, že za instabilní situaci považujeme případ, kdy existuje mod, pro který je  $kc_i > 0$ ; vzhledem k tomu, že  $k > 0$ , je i  $c_i > 0$ . Dále je-li pro dané  $k$  číslo  $c$  vlastním číslem (10.1) a  $\hat{\psi}$  odpovídající vlastní funkcí, jsou i příslušné komplexně sdružené  $c^*$  a  $\hat{\psi}^*$  vlastním číslem i vlastní funkcí (10.1) pro stejné  $k$ . Z toho vyplývá, že každý instabilní mod s rostoucí amplitudou je doprovázen i modem se

zmenšující se amplitudou. Přitom je jeho pokles amplitudy v absolutní hodnotě stejný jako růst amplitudy instabilního modu.

Uvedme rovnici (10.1) do následujícího tvaru jejím vydělením  $(\bar{u} - c)$ , tedy

$$\frac{d^2\hat{\psi}}{dz^2} - k^2\hat{\psi} - \frac{d^2\bar{u}/dz^2}{\bar{u} - c}\hat{\psi} = 0 \quad (10.3)$$

a předpokládejme, že  $c_i > 0$  (aby rovnice nebyla singulární). Nyní vynásobme rovnici (10.3) veličinou  $\hat{\psi}^*$  komplexně sdruženou s  $\hat{\psi}$  a výsledek integrujme podél  $z$  od  $z_1$  do  $z_2$ :

$$\int_{z_1}^{z_2} \left( \left| \frac{d\hat{\psi}}{dz} \right|^2 + k^2 |\hat{\psi}|^2 \right) dz + \int_{z_1}^{z_2} \frac{d^2\bar{u}/dz^2}{\bar{u} - c} |\hat{\psi}|^2 dz = 0, \quad (10.4)$$

kde jsme první člen integrovali per partes. Do poslední rovnice dosadíme za fázovou rychlost  $c = c_r + i c_i$  a vyčleníme z ní imaginární část

$$c_i \int_{z_1}^{z_2} \frac{d^2\bar{u}/dz^2}{|\bar{u} - c|^2} |\hat{\psi}|^2 dz = 0. \quad (10.5)$$

Protože  $c_i > 0$ , poslední rovnice je splněna jen v případě, že  $d^2\bar{u}/dz^2$  změní alespoň jednou znaménko pro nějaké  $z \in (z_1, z_2)$ . Jinými slovy to znamená, že profil rychlost proudění  $\bar{u}(z)$  má někde v oblasti proudění inflexní bod<sup>\*)</sup>. Toto tvrzení představuje nutnou podmínku instability studovaného proudění a je předmětem *Rayleighova teorému* z roku 1880. Naneštěstí se jedná „jen“ o nutnou podmínku instability, i když bychom raději disponovali postačující podmínkou instability. Z elementární logiky vyplývá alespoň postačující podmínka stability, podle které je pro stabilitu, to znamená  $c_i = 0$ , našeho proudění postačující, aby  $d^2\bar{u}/dz^2 \neq 0$  pro všechna  $z$  mezi  $z_1$  a  $z_2$ .

Silnější podoba teorému byla odvozena Fjørtoftem v roce 1950, který tvrdí, že nutnou podmínkou instability je platnost nerovnosti  $\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}(\bar{u} - \bar{u}_s) < 0$  alespoň někde v oblasti proudění a  $z_s$  je bod, ve kterém  $\frac{d^2\bar{u}(z_s)}{dz^2} = 0$  a  $\bar{u}_s = \bar{u}(z_s)$ .

<sup>\*)</sup> Proto bývá také tento teorém nazýván Rayleighovým teorémem inflexního bodu.



Abychom tento teorém dokázali, uvažujme reálnou část rovnice (10.4)

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{d^2 \bar{u}/dz^2}{|\bar{u}-c|^2} (\bar{u}-c_r) |\hat{\psi}|^2 dz = - \int_{z_1}^{z_2} \left( \left| \frac{d\hat{\psi}}{dz} \right|^2 + k^2 |\hat{\psi}|^2 \right) dz. \quad (10.6)$$

Předpokládáme-li, že profil rychlosti proudění  $\bar{u}(z)$  splňuje Rayleighovo kritérium, tedy že rychlost proudění  $\bar{u}$  má inflexní bod v  $z_s$ , je

$$(c_r - \bar{u}_s) \int_{z_1}^{z_2} \frac{d^2 \bar{u}/dz^2}{|\bar{u}-c|^2} |\hat{\psi}|^2 dz = 0 \quad (10.7)$$

a výraz (10.7) můžeme přičíst k levé straně rovnice (10.6). Tím dostaneme

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{d^2 \bar{u}/dz^2}{|\bar{u}-c|^2} (\bar{u}-\bar{u}_s) |\hat{\psi}|^2 dz = - \int_{z_1}^{z_2} \left( \left| \frac{d\hat{\psi}}{dz} \right|^2 + k^2 |\hat{\psi}|^2 \right) dz < 0, \quad (10.8)$$

takže vidíme, že výraz  $\frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} (\bar{u}-\bar{u}_s) < 0$  někde mezi  $z_1$  a  $z_2$ . Tím je tedy

*Fjørtoftův teorém dokázán.*

Fjørtoftův výsledek můžeme vyjádřit příhodnějším způsobem pro monotónní profily rychlosti proudění s jedním inflexním bodem v  $z_s$ . V tomto případě mohou jak  $d^2 \bar{u}/dz^2$ , tak i  $(\bar{u}-\bar{u}_s)$  měnit znaménko pouze v bodě  $z=z_s$ . Abychom tedy určili znaménko obou výrazů v celém rozsahu  $z$ , stačí vyšetřovat jejich znaménko jen v okolí  $z_s$ . Provedme tedy Taylorův

rozvoj funkce  $\frac{d^2 \bar{u}(z)}{dz^2} [\bar{u}(z) - \bar{u}(z_s)]$  v okolí  $z_s$ :

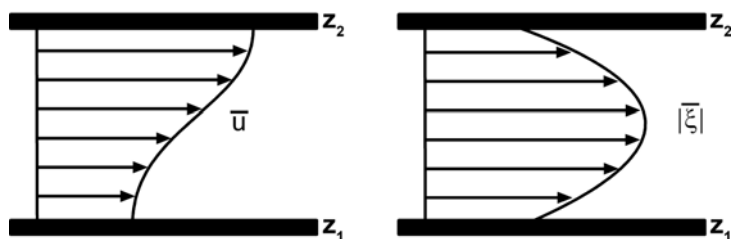
$$\frac{d^2 \bar{u}(z)}{dz^2} [\bar{u}(z) - \bar{u}(z_s)] \approx \frac{d\bar{u}(z_s)}{dz} \frac{d^3 \bar{u}(z_s)}{dz^3} (z-z_s)^2 + \dots \quad (10.9)$$

Uvědomíme-li si, že druhou mocninou vorticity  $\bar{\xi}^2(z)$  základního proudění  $\bar{u}(z)$  můžeme vyjádřit jako (opět v okolí  $z_s$ )

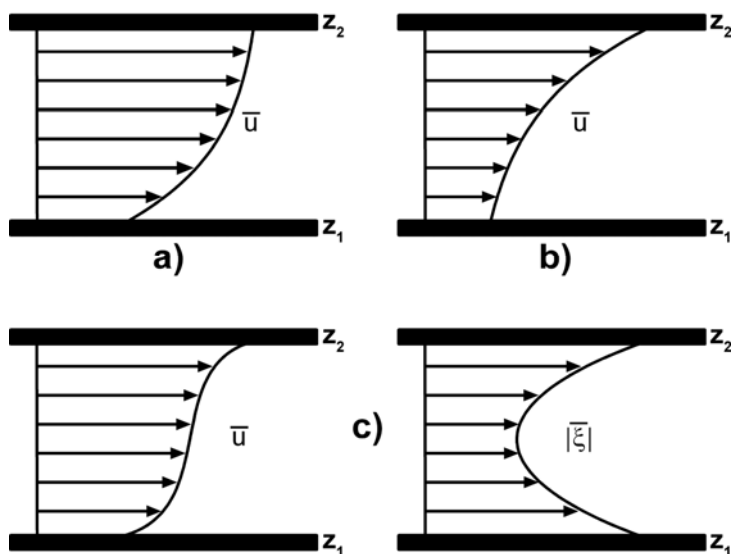
$$\bar{\xi}^2(z) = \left[ \frac{d\bar{u}(z)}{dz} \right]^2 \approx \bar{\xi}^2(z_s) + \frac{d\bar{u}(z_s)}{dz} \frac{d^3 \bar{u}(z_s)}{dz^3} (z-z_s)^2 + \dots, \quad (10.10)$$

a protože Fjørtoftův teorém vyžaduje, aby  $\frac{d\bar{u}(z_s)}{dz} \frac{d^3 \bar{u}(z_s)}{dz^3} < 0$ , vyplývá z (10.10), že  $\bar{\xi}^2(z)$  má v  $z_s$  své maximum. To tedy znamená, že ve

speciálním případě monotónního profilu rychlosti proudění  $\bar{u}(z)$  je nutnou podmínkou instability požadavek, aby absolutní hodnota vorticity základního proudění  $|\bar{\xi}| \equiv \left| \frac{d\bar{u}(z)}{dz} \right|$  měla maximum v bodě  $z_s$ , kde má rychlost proudění inflexní bod. Některé příklady stabilních a potenciálně instabilních profilů rychlosti proudění, resp. vorticity vidíme na [obrázcích 10.1 a 10.2](#).



Obr. 10.1 Profil rychlosti proudění a vorticity splňující Fjørtoftovu nutnou podmínku instability. Upraveno podle [9].



Obr. 10.2 Stabilní profily rychlosti proudění podle Rayleighova teorému a) b), podle Fjørtoftova teorému c). Upraveno podle [9].

Bohužel obě dvě kritéria (Rayleighův i Fjørtoftův teorém) jsou nutnými, nikoliv postačujícími podmínkami instability. Dobrým příkladem v tomto směru je proudění s profilem  $U(z) = \sin z$ ,  $z_1 \leq z \leq z_2$ , které studoval Tollmien v roce 1935. Inflexní body takového profilu proudění jsou v  $z = z_s = n\pi$

( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Jestliže žádné z těchto  $z_s$  neleží v intervalu  $(z_1, z_2)$ , je proudění stabilní podle Rayleighova teoremu. Naopak, budeme-li předpokládat, že existuje alespoň jedna hodnota  $z_s$  mezi  $z_1$  a  $z_2$  (bez ztráty na obecnosti můžeme položit  $z_s = 0$ , tzn.  $z_1 < 0 < z_2$ ), je  $c = c_s = 0$  a Rayleighova rovnice má tvar

$$\sin z \left[ \frac{d^2 \hat{\psi}}{dz^2} + (1 - k^2) \hat{\psi} \right] = 0 \quad (10.11)$$

s okrajovými podmínkami  $\hat{\psi} = 0$  pro  $z = z_1$  a  $z = z_2$ . Vynecháme-li nyní faktor  $\sin z$ , čímž ignorujeme spojité spektrum, máme pro amplitudy a vlnová čísla

$$\hat{\psi}_s = \sin \left( n\pi \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right),$$

$$k_s = \sqrt{1 - \frac{n^2 \pi^2}{(z_2 - z_1)^2}} \quad (10.12)$$

pro všechna  $n < (z_2 - z_1)/\pi$ . To znamená, že je-li  $z_2 - z_1 < \pi$ , je proudění stabilní, ačkoliv má profil rychlosti inflexní bod. Což je tedy Tollmienův protipříklad, který ukazuje, že Rayleighův teorem nepředstavuje postačující podmínku instability; pochopitelně je-li  $z_2 - z_1 < \pi$ , je proudění instabilní.

Pohled na Rayleighův a Fjørtoftův teorem z energetického hlediska je uveden v [9], my na tomto místě jen konstatujeme, že zatímco Rayleighův teorem je spojen se zachováním hybnosti, Fjørtoftův teorem je spojen se zachováním kinetické energie.

Poněkud odlišným zobecněním Rayleighova teoremu je Kuoův teorem [30], který bere v úvahu rovněž rotaci prostředí pomocí takzvané  $\beta$  rovinné aproximace. O tomto teoremu se zmíníme v pojednání o barotropní instabilitě.

Poslední teorem, který v této kapitole odvodíme z Rayleighovy rovnice (10.1), je *Howardův polokruhový teorem*, podle kterého musí pro instabilní mod, to je  $c_i > 0$ , platit

$$\left[ c_r - \frac{1}{2}(U_{\max} + U_{\min}) \right]^2 + c_i^2 \leq \left[ \frac{1}{2}(U_{\max} - U_{\min}) \right]^2, \quad (10.13)$$

kde  $U_{\min}$  je minimum a  $U_{\max}$  maximum  $\bar{u}(z)$  v intervalu  $z_1 \leq z \leq z_2$ . Přeložíme-li vztah (10.13) z řeči matematiky do češtiny, můžeme říci, že je-li  $c_i > 0$ , leží fázová rychlost  $c$  uvnitř horní poloviny polokruhu komplexní

roviny se středem  $\frac{1}{2}(U_{\max} + U_{\min})$  a poloměrem  $\frac{1}{2}(U_{\max} - U_{\min})$ . Za zmínku stojí, že již Rayleigh dokázal, že je-li  $c_r \neq 0$ , musí reálná část fázové rychlosti  $c_r$  ležet mezi  $U_{\min}$  a  $U_{\max}$ . Dokažme nyní Howardův polokruhový teorém. Za tímto účelem nejprve převedme jednoduchými úpravami Rayleighovu rovnici (10.1) na samoadjungovaný tvar

$$\frac{d}{dz} \left[ (\bar{u} - c)^2 \frac{d\tilde{\psi}}{dz} \right] - k^2 (\bar{u} - c)^2 \tilde{\psi} = 0, \quad (10.14)$$

kde  $\tilde{\psi} = \text{konst} \times \hat{\psi} / (\bar{u} - c)$ . Rovnici (10.14) vynásobme veličinou  $\tilde{\psi}^*$  komplexně sdruženou s  $\tilde{\psi}$  a integrujme od  $z_1$  do  $z_2$ . Dostaneme

$$\int_{z_1}^{z_2} (\bar{u} - c)^2 \left( \left| \frac{d\tilde{\psi}}{dz} \right|^2 + k^2 |\tilde{\psi}|^2 \right) dz = 0, \quad (10.15)$$

kde předpokládáme, že  $c_i \neq 0$ , takže výše uvedený vztah je nesingulární. Separujeme-li reálnou a imaginární část posledního integrálu, získáme

$$\int_{z_1}^{z_2} [(\bar{u} - c_r)^2 - c_i^2] \left( \left| \frac{d\tilde{\psi}}{dz} \right|^2 + k^2 |\tilde{\psi}|^2 \right) dz = 0, \quad (10.16a)$$

$$2c_i \int_{z_1}^{z_2} (\bar{u} - c_r) \left( \left| \frac{d\tilde{\psi}}{dz} \right|^2 + k^2 |\tilde{\psi}|^2 \right) dz = 0. \quad (10.16b)$$

Z druhé rovnice (10.16) okamžitě vyplývá výsledek, který znal již Rayleigh: ( $U_{\min} < c_r < U_{\max}$ ). Fyzikálně toto zjištění znamená, že se instabilní porucha pohybuje rychlostí, která se rovná rychlosti základního proudění v určité hladině. Řečeno jinými slovy, mezi  $z_1$  a  $z_2$  existuje místo, kde se instabilní mod nepohybuje vůči základnímu proudění a zvětšuje se jeho amplituda. Hladina, ve které je  $\bar{u} = c_r$ , se nazývá *kritickou hladinou* (někdy se používá i označení *řídící hladina*). Tuto hladinu budeme dále charakterizovat indexem „ $k$ “, to znamená samotnou hladinu jako  $z_k$  a rychlost proudění v této hladině jako  $\bar{u}_k$ . Tato hladina má velký fyzikální význam, protože je to hladina, ve které se realizuje intenzivní výměna energie mezi základním prouděním a vlnovými poruchami (větší podrobnosti viz [8,10]).

Pokračujme v našich úvahách dále. Vybaveni znalostí o existenci mezi reálné části fázové rychlosti  $c_r$  nalezneme hranice pro její imaginární část  $c_i$ . Je zřejmé, že platí nerovnost

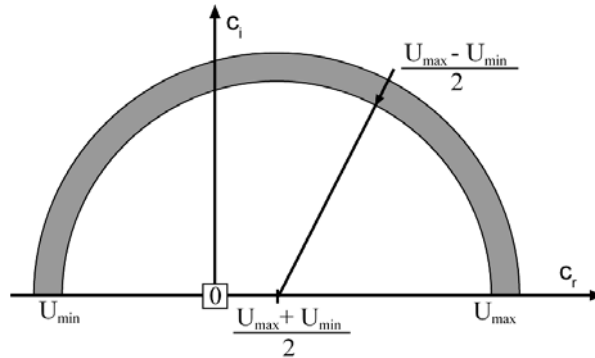
$$\int_{z_1}^{z_2} (\bar{u} - U_{\min})(\bar{u} - U_{\max}) \left( \left| \frac{d\tilde{\psi}}{dz} \right|^2 + k^2 |\tilde{\psi}|^2 \right) dz \leq 0. \quad (10.17)$$

Tuto nerovnost přičtĚme k rovnici (10.16a) a od výsledku odečtĚme rovnici (10.16b) vynásobenou  $(U_{\min} + U_{\max} - 2c_r)$ . Po naznačených úpravách a vhodném uspořádaní jednotlivých členů získáme nerovnost

$$\left[ \left( c_r - \frac{U_{\max} + U_{\min}}{2} \right)^2 + c_i^2 - \left( \frac{U_{\max} - U_{\min}}{2} \right)^2 \right] \int_{z_1}^{z_2} \left( \left| \frac{d\tilde{\psi}}{dz} \right|^2 + k^2 |\tilde{\psi}|^2 \right) dz \leq 0, \quad (10.18)$$

kde integrál může nabývat pouze kladných hodnot. Proto, aby byla nerovnost (10.18) splněna, musí být výraz v hranatých závorkách stojících před integrálem záporný nebo rovný nule. Tento požadavek vede přímo na rovnici (10.13), čímž jsme Howardův polokruhový teorém dokázali. Schématicky je tvrzení teorému znázornĚno na [obrázku 10.3](#). Z něho i ze vztahu (10.13) je zřejmé, že imaginární část fázové rychlosti je shora omezena výrazem  $c_i \leq (U_{\max} - U_{\min})/2$  a podobně je omezena i rychlost růstu (růstový faktor) instabilních poruch  $kc_i$ :

$$kc_i \leq \frac{k}{2}(U_{\max} - U_{\min}). \quad (10.19)$$



Obr. 10.3 Schématické znázornĚní Howardova polokruhového teorĚmu.

Na závĚr pojednání o Howardově teorĚmu poznamenejme, že jeho zobecnĚní na pŕípad rotující ZemĚ a tzv.  $\beta$  rovinnou aproximaci (viz dále) zveřejnil Pedlosky v prvním vydání své monografie [10].

Chceme-li řešit Rayleighovu rovnici ve tvaru (10.1) vidíme, že má singulární bod v bodě  $z = z_k$ , kde je  $\bar{u} - c = 0$  a  $d\bar{u}_k/dz \neq 0$ . Existují dvě nezávislá řešení Rayleighovy rovnice v okolí  $z_k$  [8,9]. První má tvar

$$\hat{\psi}_1(z) = (z - z_k)P_1(z), \quad (10.20a)$$

kde  $P_1(z)$  má analytické vyjádření v hladině  $z_k$  a  $P_1(z_k) \neq 0$ . Pro jednoduchost můžeme položit  $P_1(z_k) = 1$ . Druhé lineárně nezávislé řešení Rayleighovy rovnice má logaritmickou větev v bodě  $z = z_k$  a má tvar

$$\hat{\psi}_2 = P_2(z) + \frac{d^2\bar{u}_k/dz^2}{d\bar{u}_k/dz} \hat{\psi}_1(z) \ln(z - z_k), \quad (10.20b)$$

kde  $P_2(z)$  má také analytické vyjádření v  $z_k$  a  $P_2(z_k) = 1$ . Řešení rovnice (10.1) v uvedeném tvaru bylo poprvé získáno Tollmienem v roce 1929 v souvislosti s diskusí řešení *Orrovy-Sommerfeldovy rovnice* a dnes je toto řešení známo pod názvem *Tollmienovo neviskosní řešení*. Pro podrobnější diskusí tohoto a dalších řešení Rayleighovy rovnice odkazujeme čtenáře na monografii Drazina a Reida [8], kde se lze seznámit například s Heisenbergovým řešením, získaným ještě před Tollmienem, popřípadě na knihu Lina [6]. Zde si jen uvedme několik prvních členů rozvoje  $P_1(z)$  a  $P_2(z)$  v mocninnou řadu:

$$P_1(z) = 1 + \frac{d^2\bar{u}_k/dz^2}{2 du_k/dz} (z - z_k) + \frac{1}{6} \left( k^2 + \frac{d^3\bar{u}_k/dz^3}{du_k/dz} \right) (z - z_k)^2 + \dots, \quad (10.21a)$$

$$P_2(z) = 1 + \left[ \frac{1}{2} k^2 + \frac{d^3u_k/dz^3}{2 du_k/dz} - \frac{(d^2u_k/dz^2)^2}{(du_k/dz)^2} \right] (z - z_k)^2 + \dots \quad (10.21b)$$

Uzavřeme stávající kapitolu spolu s [8] vyšetřením tvaru proudnic v blízkosti kritické hladiny, kde  $\bar{u}(z_k) = c$ . Jejich podobu odhalil Kelvin v roce 1880. Položíme rychlost celého systému rovnou fázové rychlosti poruch tak, abychom mohli pohyb považovat za ustálený vůči transformovanému systému. Na proudnice tedy nahlížíme z pohledu pozorovatele, který se pohybuje rychlostí  $c$ . Po takové transformaci jsou proudnice totožné s trajektoriemi částic tekutiny. Proudová funkce má pro takové ustálené proudění tvar

$$\Psi(z) + A\Re \left[ \hat{\psi}(z) e^{ikx} \right], \quad (10.22a)$$

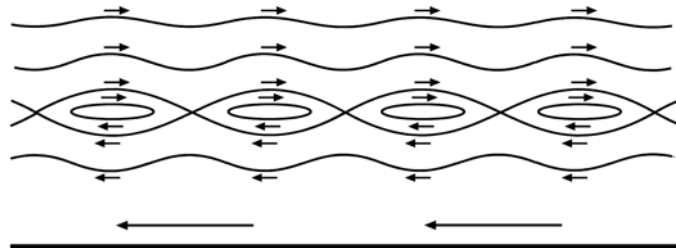
kde

$$\Psi(z) = \int_{z_k}^z [\bar{u}(z') - c] dz' \quad (10.22b)$$

je proudová funkce základního proudění v transformovaném systému a  $A$  reprezentuje reálnou konstantu úměrnou amplitudě vlnové poruchy. V blízkosti kritické hladiny  $z_k$  má rovnice proudnic tvar

$$\frac{1}{2} \frac{d\bar{u}(z_k)}{dz} (z - z_k)^2 + A\hat{\psi}(z_k) \cos kx = konst, \quad (10.23)$$

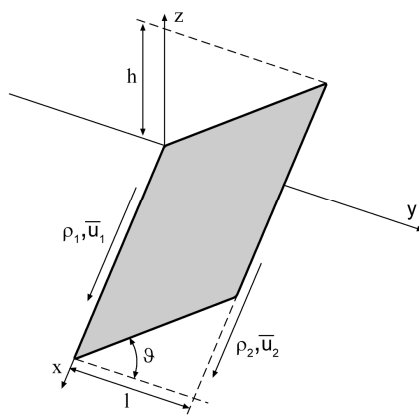
kde je  $\hat{\psi}(z_k)$  reálné díky vhodné normalizaci. Proudnice jsou znázorněny na [obrázku 10.4](#) a mají tvar známých „Kelvinových kočičích očí“.



Obr. 10.4 Tvar proudnic ve tvaru „Kelvinových kočičích očí“ v blízkosti kritické hladiny. Upraveno podle [8].

## 11 STABILITA FRONTÁLNÍCH VLN

V předchozích kapitolách jsme neuvažovali rotaci Země. Proto získané výsledky nelze přímo aplikovat na vlnové pohyby na frontálních rozhraních, zvláště když předmětem našeho zájmu budou frontální vlny o velmi velké vlnové délce, pro které nelze vzhledem k jejich horizontálnímu rozsahu vliv rotace Země zanedbat. Podle klasických představ tzv. norské meteorologické školy jsou rozvíjející se (tedy instabilní) vlny na polárních frontách zodpovědné za vznik mimotropických cyklon. Nyní se budeme zabývat právě stabilitou *Margulesova frontálního rozhraní*, tedy stabilitou plochy diskontinuity oddělující dvě vzduchové hmoty s odlišnými vlastnostmi. Více méně v této části budeme reprodukovat Kočinovy úvahy uvedené v [24].



Obr. 11.1 Uspořádání modelu pro studium stability frontálních vln.

Uvažujme situaci znázorněnou na [obrázku 11.1](#). Zavedme pravotočivou souřadnicovou soustavu s osou  $x$  rovnoběžnou s frontálním rozhraním, osou  $y$  mířící do studenějšího vzduchu a osou  $z$  orientovanou kolmo vzhůru.



Veličiny vztažené k teplejšímu vzduchu označíme indexem 1, ke studenějšímu indexem 2. Hustoty  $\rho_1$  a  $\rho_2$  po obou stranách frontálního rozhraní ponechme konstantní. Rychlosti proudění vzduchu  $\bar{u}_1$  a  $\bar{u}_2$  necht' jsou rovněž konstantní a rovnoběžné s rozhraním. Dále necht' jsou vzduchové hmoty ve výškách  $z = 0$  a  $z = h$  neprostupnými horizontálními rovinami. Frontální rozhraní tedy sahá do výšky  $h$  a jeho projekce do roviny  $xy$  dosahuje do vzdálenosti  $y = l$ . Základní stav necht' je popsán veličinami

$$\begin{aligned}\bar{u}_1 &= \text{konst}, \rho_1 = \text{konst}, \bar{v}_1 = \bar{w}_1 = 0, \bar{p}_1, \\ \bar{u}_2 &= \text{konst}, \rho_2 = \text{konst}, \bar{v}_2 = \bar{w}_2 = 0, \bar{p}_2.\end{aligned}$$

Pohybové rovnice pro tento základní stav píšeme ve tvaru

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial x} = 0, \quad (11.1a)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial y} + 2\Omega_z \bar{u}_1 = 0, \quad \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial y} + 2\Omega_z \bar{u}_2 = 0, \quad (11.1b)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial z} + g - 2\Omega_y \bar{u}_1 = 0, \quad \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial z} + g - 2\Omega_y \bar{u}_2 = 0. \quad (11.1c)$$

Integrací první rovnice (11.1c) podle  $z$  dostaneme

$$\bar{p}_1 = 2\rho_1\Omega_y\bar{u}_1z - g\rho_1z + f(y). \quad (11.2)$$

Derivací poslední rovnice podle  $y$  a jejím porovnáním s první rovnicí (11.1b) máme

$$f'(y) = -2\rho_1\Omega_z\bar{u}_1,$$

což po integraci podle  $y$  dává pro funkci  $f(y)$

$$f(y) = -2\rho_1\Omega_z\bar{u}_1y + C,$$

kde  $C$  je integrační konstanta, která má význam tlaku v počátku souřadnicové soustavy. Dosazením poslední rovnice do rovnice (11.2) máme

$$\bar{p}_1 = -g\rho_1z - 2\rho_1\bar{u}_1(\Omega_z y - \Omega_y z) + C. \quad (11.3)$$

Zcela analogickým postupem aplikovaným na druhé rovnice (11.1c) a (11.1b) lze ukázat, že

$$\bar{p}_2 = -g\rho_2 z - 2\rho_2 \bar{u}_2 (\Omega_z y - \Omega_y z) + C. \quad (11.4)$$

Dynamická okrajová podmínka na frontálním rozhraní vyžaduje spojitost tlaku při přechodu přes toto rozhraní. Porovnáním (11.3) a (11.4) tedy obdržíme

$$-g\rho_1 z - 2\rho_1 \bar{u}_1 (\Omega_z y - \Omega_y z) = -g\rho_2 z - 2\rho_2 \bar{u}_2 (\Omega_z y - \Omega_y z),$$

odkud vyjádříme sklon frontální plochy jako  $\text{tg } \vartheta = z/y$ :

$$\text{tg } \vartheta = \frac{2\Omega_z (\rho_1 \bar{u}_1 - \rho_2 \bar{u}_2)}{g(\rho_2 - \rho_1) + 2\Omega_y (\rho_1 \bar{u}_1 - \rho_2 \bar{u}_2)}. \quad (11.5)$$

Vztah (11.5) je známá *Margulesova formule*.

Položíme-li  $F \equiv y \text{tg } \alpha - z$ , můžeme psát kinematickou okrajovou podmínku na rozhraní ve tvaru

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad (11.6a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (11.6b)$$

Fyzikální smysl podmínek (11.6) spočívá v tom, že se rozhraní skládá stále ze stejných vzduchových částic.

Nyní nechť jsou na základní stav superponovány malé poruchy v poli rychlosti proudění a tlaku vzduchu. Výsledný (složený) stav je pak následující:

$$\bar{u}_1 + u'_1, v'_1, w'_1, \bar{p}_1 + p'_1, \rho_1,$$

$$\bar{u}_2 + u'_2, v'_2, w'_2, \bar{p}_2 + p'_2, \rho_2.$$

Odchylku frontálního rozhraní od jeho polohy v základním stavu označme  $\zeta$ . V dalším textu této kapitoly nebudeme používat svislou čárku k označení poruchových veličin. Linearizované perturbační pohybové rovnice a rovnice kontinuity mají po obvyklých úpravách tvar

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u_j}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p_j}{\partial x} - 2\Omega_y w_j + 2\Omega_z v_j, \quad (11.7a)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial v_j}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p_j}{\partial y} - 2\Omega_z u_j + 2\Omega_x w_j, \quad (11.7b)$$

$$\frac{\partial w_j}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial w_j}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p_j}{\partial z} - 2\Omega_x v_j + 2\Omega_y u_j, \quad (11.7c)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} + \frac{\partial w_j}{\partial z} = 0, \quad j=1,2. \quad (11.7d)$$

Rovnice plochy rozhraní je

$$z = y \operatorname{tg} \vartheta + \zeta(x, y, t). \quad (11.8)$$

Dynamická okrajová podmínka má pro výsledný stav tvar

$$p_2 - p_1 = \left[ (\rho_2 - \rho_1)g + 2(\rho_1 \bar{u}_1 - \rho_2 \bar{u}_2)\Omega_y \right] \zeta, \quad (11.9)$$

zatímco kinematickou okrajovou podmínku je možné psát ve formě

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_1 \operatorname{tg} \vartheta - w_1 = 0, \quad (11.10a)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_2 \operatorname{tg} \vartheta - w_2 = 0. \quad (11.10b)$$

V rovnicích (11.9) i (11.10) jsme zanedbali členy nelineární vzhledem k perturbacím. Na neprostupných hranicích ve výškách  $z=0$  a  $z=h$  musí navíc platit okrajové podmínky

$$w_1 = 0 \quad \text{pro } z = h, \quad (11.11a)$$

$$w_2 = 0 \quad \text{pro } z = 0. \quad (11.11b)$$

Integrací rovnice kontinuity (11.7d) získáme pro vertikální rychlosti následující vyjádření

$$w_1 = -\int_z^h \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dz' = (z-h) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right), \quad (11.12a)$$

$$w_2 = -\int_z^0 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) dz' = z \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right). \quad (11.12b)$$

Protože v reálné atmosféře je  $\vartheta \approx \operatorname{tg} \vartheta \approx 0,5^\circ$ , je velikost vertikálních pohybů daleko menší než pohybů horizontálních. Kočin (viz například [24]) proto zanedbává v pohybových rovnicích (11.7a) a (11.7b) výrazy obsa-

hující vertikální rychlosti  $w_1$  a  $w_2$ , tedy členy  $-2\Omega_y w_j$  a  $2\Omega_x w_j$ . Současně s tím je třeba vynechat v rovnicích (11.7c) i členy  $-2\Omega_x v_j$  a  $2\Omega_y u_j$ . K tomu nás vede následující úvaha. Spočítáme-li celkovou změnu perturbační kinetické energie vztaženou na jednotku hmotnosti bez vynechání jakéhokoliv členu pomocí soustavy (11.7), dostaneme

$$\frac{dK_j}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u_j^2 + v_j^2 + w_j^2) = u_j \frac{du_j}{dt} + v_j \frac{dv_j}{dt} + w_j \frac{dw_j}{dt} = \frac{1}{\rho_j} \mathbf{v} \cdot \nabla p.$$

Vyjádříme-li tutéž změnu kinetické energie za podmínky, že vynecháme v rovnicích (11.7)  $2\Omega_y w_j$  a  $2\Omega_x w_j$ , ale ponecháme  $-2\Omega_x v_j$  a  $2\Omega_y u_j$ , máme

$$\frac{dK_j}{dt} = -\frac{1}{\rho_j} \mathbf{v} \cdot \nabla p - 2\Omega_x w_j v_j + 2\Omega_y u_j w_j.$$

Zůstávající členy tedy působí jako „falešný“ zdroj poruchové kinetické energie, a odtud tedy plyne oprávněnost jejich zanedbání v rovnicích (11.7c), společně s opominutím výše uvedených členů.

Uvědomme si dále, že na reálných atmosférických frontách jsou pozorovaná vertikální zrychlení o dva až tři řády menší než zrychlení horizontální. Proto v (11.7c) položme

$$\frac{dw_j}{dt} = \frac{\partial w_j}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial w_j}{\partial x} = 0. \quad (11.13)$$

Potom vertikální profil tlaku odpovídá barometrické formulí a  $p_1$  a  $p_2$  budou funkcemi pouze  $x$ ,  $y$ ,  $t$ . Analogicky předpokládejme, že i  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  jsou funkcemi  $x$ ,  $y$ ,  $t$ .

Označme dále  $\Omega \equiv \Omega_z$ . Díky výše provedeným zjednodušením je možné psát rovnice (11.7a), (11.7b), (11.9), (11.10a) a (11.10b) ve tvaru

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} + 2\Omega v_1, \quad (11.14a)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial x} + 2\Omega v_2, \quad (11.14b)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial y} - 2\Omega u_1, \quad (11.14c)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial y} - 2\Omega u_2, \quad (11.14d)$$

$$g(\rho_2 - \rho_1)\zeta = p_2 - p_1, \quad (11.14e)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -v_1 \operatorname{tg} \vartheta + (h - y \operatorname{tg} \vartheta) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right), \quad (11.14f)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -v_2 \operatorname{tg} \vartheta - y \operatorname{tg} \vartheta \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right). \quad (11.14g)$$

V pohybových rovnicích soustavy (11.14) jsme položili  $\rho_1 \approx \rho_2 \approx \rho$ , aniž bychom se dopustili větší chyby a do kinematických okrajových podmínek jsme dosadili pomocí rovnice kontinuity (11.7d). Rovnice (11.14a) až (11.14g) představují soustavu sedmi rovnic pro sedm neznámých  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  a  $\zeta$ . Jejich řešení hledíme ve vlnovém tvaru

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ p_1 \\ p_2 \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1(y) \\ \hat{u}_2(y) \\ \hat{v}_1(y) \\ \hat{v}_2(y) \\ \hat{p}_1(y) \\ \hat{p}_2(y) \\ \hat{\zeta}(y) \end{pmatrix} e^{ik(x-ct)}. \quad (11.15)$$

Připomeňme, že fyzikální smysl má pouze reálná část těchto výrazů. Dosadíme-li vyjádření (11.15) pro řešení do soustavy (11.14) získáme následující systém rovnic

$$ik(\bar{u}_1 - c)\hat{u}_1 - 2\Omega\hat{v}_1 = -\frac{ik}{\rho}\hat{p}_1, \quad (11.16a)$$

$$ik(\bar{u}_2 - c)\hat{u}_2 - 2\Omega\hat{v}_2 = -\frac{ik}{\rho}\hat{p}_2, \quad (11.16b)$$

$$ik(\bar{u}_1 - c)\hat{v}_1 + 2\Omega\hat{u}_1 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial y}, \quad (11.16c)$$

$$ik(\bar{u}_2 - c)\hat{v}_2 + 2\Omega\hat{u}_2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\hat{p}_2}{\partial y}, \quad (11.16d)$$

$$g(\rho_2 - \rho_1)\hat{\zeta} = \hat{p}_2 - \hat{p}_1, \quad (11.16e)$$

$$ik(\bar{u}_1 - c)\hat{\zeta} = -\text{tg } \mathcal{G}\hat{v}_1 + (h - y \text{tg } \mathcal{G})\left(ik\hat{u}_1 + \frac{\partial\hat{v}_1}{\partial y}\right), \quad (11.16f)$$

$$ik(\bar{u}_2 - c)\hat{\zeta} = -\text{tg } \mathcal{G}\hat{v}_2 - y\text{tg } \mathcal{G}\left(ik\hat{u}_2 + \frac{\partial\hat{v}_2}{\partial y}\right). \quad (11.16g)$$

Pomocí rovnic (11.16a) a (11.16c) vyjádříme amplitudy  $\hat{u}_1$  a  $\hat{v}_1$ :

$$\hat{u}_1 = \frac{k^2(\bar{u}_1 - c)\hat{p}_1 - 2\Omega\frac{\partial\hat{p}_1}{\partial y}}{\rho[4\Omega^2 - k^2(\bar{u}_1 - c)^2]}, \quad (11.17a)$$

$$\hat{v}_1 = i\frac{2\Omega k\hat{p}_1 - k(\bar{u}_1 - c)\frac{\partial\hat{p}_1}{\partial y}}{\rho[4\Omega^2 - k^2(\bar{u}_1 - c)^2]}. \quad (11.17b)$$

Analogicky z rovnic (11.16b) a (11.16d) vyjádříme  $\hat{u}_2$  a  $\hat{v}_2$ :

$$\hat{u}_2 = \frac{k^2(\bar{u}_2 - c)\hat{p}_2 - 2\Omega\frac{\partial\hat{p}_2}{\partial y}}{\rho[4\Omega^2 - k^2(\bar{u}_2 - c)^2]}, \quad (11.17c)$$

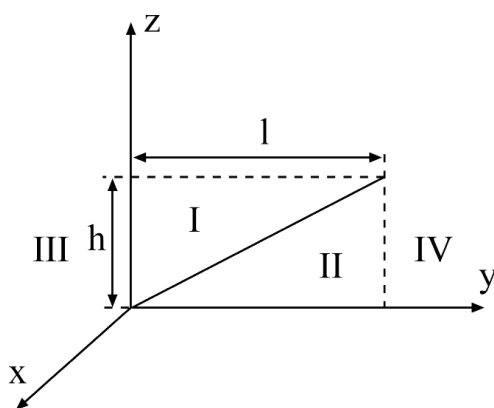
$$\hat{v}_2 = i\frac{2\Omega k\hat{p}_2 - k(\bar{u}_2 - c)\frac{\partial\hat{p}_2}{\partial y}}{\rho[4\Omega^2 - k^2(\bar{u}_2 - c)^2]}. \quad (11.17d)$$

Z rovnice (11.16e) dosadíme za  $\hat{\zeta}$  do rovnic (11.16f) a (11.16g). Dále derivujeme parciálně podle  $y$  rovnice (11.17b) a (11.17d) a výsledek dosadíme do výrazů (11.16f) a (11.16g). Do takto upravených rovnic dosadíme za  $\hat{u}_1$ ,  $\hat{v}_1$ ,  $\hat{u}_2$  a  $\hat{v}_2$  pomocí (11.17). Po naznačených úpravách obdržíme

$$\frac{d}{dy} \left[ (y-l) \frac{d\hat{p}_1}{dy} \right] - \left[ k^2(y-l) + \frac{2\Omega}{\bar{u}_1 - c} \right] \hat{p}_1 = \frac{\rho [4\Omega^2 - k^2(\bar{u}_1 - c)^2]}{g(\rho_1 - \rho_2)} (\hat{p}_1 - \hat{p}_2), \quad (11.18a)$$

$$\frac{d}{dy} \left( y \frac{d\hat{p}_2}{dy} \right) - \left( k^2 y + \frac{2\Omega}{\bar{u}_2 - c} \right) \hat{p}_2 = \frac{\rho [4\Omega^2 - k^2(\bar{u}_2 - c)^2]}{g(\rho_2 - \rho_1) \operatorname{tg} \vartheta} (\hat{p}_2 - \hat{p}_1), \quad (11.18b)$$

kde jsme zavedli  $l = h/\operatorname{tg} \vartheta$ . Získali jsme tedy dvě obyčejné diferenciální rovnice pro amplitudové funkce tlaku  $\hat{p}_1$  a  $\hat{p}_2$ .



Obr. 11.2 K formulaci okrajových podmínek na frontálním rozhraní.

Položme si nyní otázku, jakým okrajovým podmínkám tyto rovnice podrobíme? Uvažujme situaci znázorněnou na [obrázku 11.2](#). Pohybujme se nejprve v oblasti III, to je v oblasti  $y < 0$ . Integrací rovnice kontinuity máme

$$w_1 = -z \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right),$$

neboť při  $z = 0$  je  $w_1 = 0$ . Při  $z = h$  je však také  $w_1 = 0$ . Je tedy možné psát

$$\left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0, \quad \text{pro } y < 0.$$

Dosadíme-li do posledního výrazu pomocí (11.15), dostaneme

$$ik\hat{u}_1 + \frac{d\hat{v}_1}{dy} = 0, \quad \text{pro } y < 0.$$

S použitím (11.17) odsud získáme

$$\frac{d^2 \hat{p}_1}{dy^2} - k^2 \hat{p}_1 = 0, \quad \text{pro } y < 0.$$

Řešení poslední rovnice při požadavku konečnosti  $\hat{p}_1$  při  $y \rightarrow -\infty$  je

$$\hat{p}_1 = C e^{ky}, \quad \text{pro } y < 0.$$

Derivací posledního výrazu podle  $y$  máme

$$\frac{d\hat{p}_1}{dy} = k\hat{p}_1, \quad \text{pro } y < 0.$$

Při přechodu z oblasti III do oblasti I není důvodu se domnívat, že se  $\hat{u}_1$  nebo  $\hat{v}_1$  mění nespojitě. Potom však zůstávají spojitě díky (11.7a) a (11.7b) i veličiny  $\hat{p}_1$  a  $d\hat{p}_1/dy$ . Platnost poslední rovnice je tedy možné rozšířit i na  $y = 0$ . Zcela analogickým postupem je možné získat vztah

$$\frac{d\hat{p}_2}{dy} = -k\hat{p}_2, \quad \text{pro } y = l,$$

při jehož odvození ovšem přechod aplikujeme mezi oblastmi II a IV. K soustavě (11.18) tedy přidáme následující okrajové podmínky

$$\frac{d\hat{p}_1}{dy} = k\hat{p}_1, \quad \text{pro } y = 0, \quad (11.19a)$$

$$\frac{d\hat{p}_2}{dy} = -k\hat{p}_2, \quad \text{pro } y = l. \quad (11.19b)$$

Zjednodušení  $\rho_1 \approx \rho_2 \approx \rho$ , kterého jsme se dopustili v rovnicích (11.14a) až (11.14d), nyní použijme i v Margulesově formuli (11.5). Navíc označme

$$\bar{u} \equiv \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}{2}. \quad (11.20a)$$

Vzorec (11.5) pak píšeme ve zjednodušeném tvaru

$$\text{tg } \vartheta \approx \frac{4\Omega\rho\bar{u}}{g(\rho_2 - \rho_1)}. \quad (11.20b)$$



Definujme nyní následující veličiny

$$c' \equiv \frac{\bar{u}_1 + \bar{u}_2}{2} - c, \quad (11.20c)$$

$$\eta \equiv \frac{2y-l}{l}. \quad (11.20d)$$

Zavedením těchto nových veličin přejdou soustava (11.18) a okrajové podmínky (11.19) na rovnice

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1+\eta) \frac{d\hat{p}_2}{d\eta} \right] - \left[ \frac{k^2 l^2}{4} (1+\eta) + \frac{l\Omega}{c' - \bar{u}} \right] \hat{p}_2 = \frac{l \left[ 4\Omega^2 - k^2 (c' - \bar{u}) \right]}{8\Omega \bar{u}} (\hat{p}_2 - \hat{p}_1), \quad (11.21a)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1-\eta) \frac{d\hat{p}_1}{d\eta} \right] - \left[ \frac{k^2 l^2}{4} (1-\eta) - \frac{l\Omega}{c' + \bar{u}} \right] \hat{p}_1 = \frac{l \left[ 4\Omega^2 - k^2 (c' + \bar{u}) \right]}{8\Omega \bar{u}} (\hat{p}_1 - \hat{p}_2), \quad (11.21b)$$

$$\frac{d\hat{p}_1}{d\eta} = \frac{kl}{2}, \quad \text{pro } \eta = -1, \quad (11.22a)$$

$$\frac{d\hat{p}_2}{d\eta} = -\frac{kl}{2}, \quad \text{pro } \eta = 1. \quad (11.22b)$$

Do těchto rovnic je možné zavést následující parametry:

$$\alpha \equiv \frac{l\Omega}{\bar{u}}, \quad \beta \equiv \frac{k\bar{u}}{2\Omega}, \quad \tau \equiv \frac{c'}{\bar{u}}. \quad (11.23)$$

Objasněme jejich fyzikální význam. Parametr  $\alpha$  je evidentně určen základním stavem,  $\beta \equiv k\bar{u}/2\Omega = \pi\bar{u}/L\Omega$  charakterizuje vlnovou délku  $L$ , zatímco  $\tau$  popisuje frekvenci, resp. fázovou rychlost frontálních kmitů. Využitím těchto nových parametrů přejdou rovnice (11.21) a (11.22) na

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1-\eta) \frac{d\hat{p}_1}{d\eta} \right] - \left[ \alpha^2 \beta^2 (1-\eta) - \frac{\alpha}{\tau+1} \right] \hat{p}_1 = \frac{\alpha}{2} \left[ 1 - \beta^2 (\tau+1)^2 \right] (\hat{p}_1 - \hat{p}_2), \quad (11.24a)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1+\eta) \frac{d\hat{p}_2}{d\eta} \right] - \left[ \alpha^2 \beta^2 (1+\eta) + \frac{\alpha}{\tau+1} \right] \hat{p}_2 = \frac{\alpha}{2} \left[ 1 - \beta^2 (\tau-1)^2 \right] (\hat{p}_2 - \hat{p}_1), \quad (11.24b)$$

$$\frac{d\hat{p}_1}{d\eta} = \alpha\beta\hat{p}_1, \quad \text{pro } \eta = -1, \quad (11.25a)$$

$$\frac{d\hat{p}_2}{d\eta} = -\alpha\beta\hat{p}_2, \quad \text{pro } \eta = 1. \quad (11.25b)$$

Z hlediska cyklogeneze, tedy možnosti případného rozvoje cyklon z frontálních vln, je důležité studovat stabilitu frontálního rozhraní vzhledem k dlouhým vlnám, pro které je  $\beta$  malé, nebo-li  $L$  je velké ve srovnání s poměrem  $\bar{u}/\Omega$ . Kočín studoval limitní případ, kdy  $\beta \rightarrow 0$ . Položme tedy  $\beta = 0$  v rovnicích (11.24) a (11.25), které se pak zjednoduší na

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1-\eta) \frac{d\hat{p}_1}{d\eta} \right] + \frac{\alpha}{\tau+1} \hat{p}_1 = \frac{\alpha}{2} (\hat{p}_1 - \hat{p}_2), \quad (11.26a)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1+\eta) \frac{d\hat{p}_2}{d\eta} \right] - \frac{\alpha}{\tau-1} \hat{p}_2 = \frac{\alpha}{2} (\hat{p}_2 - \hat{p}_1), \quad (11.26b)$$

$$\frac{d\hat{p}_1}{d\eta} = 0, \quad \text{pro } \eta = -1, \quad (11.27a)$$

$$\frac{d\hat{p}_2}{d\eta} = 0, \quad \text{pro } \eta = 1. \quad (11.27b)$$

Vynásobme rovnice (11.26a) pomocí  $(\tau+1)$  a sečtěme s rovnicí (11.26b) vynásobenou  $(\tau-1)$  a výsledek poté integrujme podle  $\eta$ . Po naznačených operacích získáme rovnici

$$(\tau-1)(1+\eta) \frac{d\hat{p}_2}{d\eta} + (\tau-1)(1-\eta) \frac{d\hat{p}_1}{d\eta} = \text{konst} \equiv 0. \quad (11.28)$$

Integrační konstantu v předchozí rovnici s přihlédnutím k (11.27) volíme rovnu nule. Zaveďme na tomto místě novou proměnnou

$$\phi(\eta) \equiv (1-\tau)(1+\eta) \frac{d\hat{p}_2}{d\eta} = (1+\tau)(1-\eta) \frac{d\hat{p}_1}{d\eta}. \quad (11.29)$$

Poté je možné rovnice (11.26) a (11.27) uvádět v nové podobě

$$(1-\eta^2) \frac{d^2\phi}{d\eta^2} + (r+s\eta)\phi(\eta) = 0, \quad (11.30)$$

$$\phi(\pm 1) = 0. \quad (11.31)$$

V předposlední rovnici jsme položili

$$r = \alpha \frac{1 + \tau^2}{1 - \tau^2}, \quad s = -\frac{2\alpha\tau}{1 - \tau^2}. \quad (11.32)$$

Kočin hledal řešení rovnice (11.30) ve tvaru

$$\phi(\eta) = a_1 W_1(\eta) + a_2 W_2(\eta) + a_3 W_3(\eta) + \dots, \quad (11.33)$$

kde  $a_1, a_2, \dots$  jsou konstanty a  $W_1(\eta), W_2(\eta), \dots$  jsou integrály Legendrových polynomů  $L_n$  stupně 1, 2, ...; viz například [31]. Platí:

$$L_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (\eta^2 - 1)^n}{d\eta^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

což znamená, že

$$W_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n-1} (\eta^2 - 1)^n}{d\eta^{n-1}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Polynomy  $W_n$  jsou vázány rekurentním vztahem

$$(2n + 1)\eta W_n = (n - 1)W_{n-1} + (n + 2)W_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.34)$$

a každý z nich řeší rovnici

$$(1 - \eta^2) \frac{d^2 W_n}{d\eta^2} + n(n + 1)W_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.35)$$

Uvedme si tvar alespoň prvních tří polynomů  $W_n$ :

$$W_1 = \frac{\eta^2 - 1}{2},$$

$$W_2 = \frac{\eta(\eta^2 - 1)}{2},$$

$$W_3 = \frac{5\eta^4 - 6\eta^2 + 1}{8}.$$

Dosadíme-li vyjádření (11.33) do (11.30) a využijeme-li rekurentní formule (11.34) a rovnice (11.35), získáme následující vztahy mezi koeficienty  $a_n$  v (11.33)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{-\frac{1}{5}s}{r-1 \cdot 2},$$

$$s \frac{a_1}{a_2} = 2 \cdot 3 - r - \frac{\delta_2 s^2}{\frac{4}{5}s \frac{a_2}{a_3}}, \quad (11.36)$$

$$\frac{k+1}{2k-1} s \frac{a_{k-1}}{a_k} = k(k+1) - r - \frac{\delta_k s^2}{\frac{k+2}{2k+1} s \frac{a_k}{a_{k+1}}},$$

kde

$$\delta_k = \frac{k(k+2)}{(2k+1)(2k+3)}. \quad (11.37)$$

Pomocí (11.36) a (11.37) lze psát

$$\frac{\delta_1 s^2}{r-2} = 2 \cdot 3 - r - \frac{\delta_2 s^2}{3 \cdot 4 - r - \frac{\delta_3 s^2}{\frac{5}{7}s \frac{a_3}{a_4}}},$$

a provedeme-li totéž pro  $a_3/a_4$ ,  $a_4/a_5$ , ..., máme

$$\frac{\delta_1 s^2}{r-2} = 2 \cdot 3 - r - \frac{\delta_2 s^2}{3 \cdot 4 - r - \frac{\delta_3 s^2}{4 \cdot 5 - r - \dots}}. \quad (11.38)$$

Ze vztahů (11.32) vyplývá, že

$$\tau = \frac{-s}{r+\alpha}, \quad (11.39)$$

$$r^2 - s^2 = \alpha^2. \quad (11.40)$$

Je-li  $s = 0$ , pak  $r = \alpha$  a s ohledem na (11.38) je  $r_1 = 1 \cdot 2$ ,  $r_2 = 2 \cdot 3$ , ..., což znamená  $\alpha = n(n+1)$ . Kočin se zabýval případem, kdy je hodnota parametru  $\alpha$  blízká ke dvěma, tedy  $r \approx 2$  a  $s \approx 0$ . Z rovnice (11.38) pak máme

$$r \approx 2 - \frac{\delta_1 s^2}{4} \quad (11.41)$$

a ze vztahu (11.40) dostáváme

$$r^2 - s^2 \approx \alpha^2,$$

což po dosazení z přibližného vzorce (11.41) dává

$$\alpha^2 \approx 4 - \delta_1 s^2 + \frac{\delta_1^2 s^4}{16} - s^2,$$

kde zanedbáme člen obsahující  $s^4$ , protože je alespoň o řád menší než zbývající členy. Můžeme tedy psát

$$s^2 \approx \frac{5}{6}(4 - \alpha^2). \quad (11.42)$$

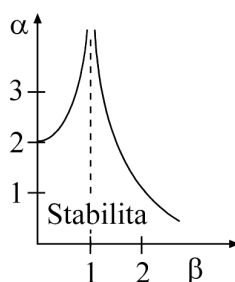
Když je  $4 < \alpha^2$ , pak  $s^2 < 0$ . To znamená, že  $s$  je komplexní číslo a díky (11.39) je i  $\tau$  komplexní číslo. Pak ale díky vztahům (11.23) a (11.20c) má fázová rychlost  $c$  frontálních vln nenulovou imaginární část a porucha je tedy instabilní. Kočín dokázal i opak, totiž že poruchy jsou vzhledem k velmi dlouhým vlnám stabilní, splňuje-li  $\alpha$  podmínku  $0 < \alpha < 2$ . Tuto podmínku je možné pomocí vztahů (11.23), (11.20a) a (11.20b) uvádět ve srozumitelnějším tvaru

$$\bar{u}_1 - \bar{u}_2 > \sqrt{\frac{gh(\rho_2 - \rho_1)}{2\rho}} = \sqrt{\frac{ghT}{2} \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)}, \quad (11.43)$$

kde jsme využili stavové rovnice. Například při teplotách  $T_1 = 280$  K,  $T_2 = 275$  K a výšce fronty  $h$  sahající do 8 km vychází z poslední podmínky, že  $\bar{u}_1 - \bar{u}_2 > 26 \text{ ms}^{-1}$ .

Kočín řešil problém stability frontálního rozhraní i vzhledem k vlnám konečné délky. Jeho výsledek je znázorněn na [obrázku 11.3](#). Vidíme, že frontální rozhraní je instabilní vzhledem k vlnám s krátkou vlnovou délkou (připomínáme, že podle vztahu (11.23) je  $\beta$  úměrné převrácené hodnotě vlnové délky  $L$ ). Delší vlny jsou pak stabilní, ale u vln s vlnovou délkou zhruba 500 až 1 000 km se znovu objevuje instabilita. Kromě popsanych případů studoval Kočín i kmity rozhraní ve směru kolmém k frontě a zjistil, že jsou stabilní. Blíže se lze s jeho postupem seznámit v [\[24\]](#).

Poznamenejme, že vedle ruské školy dynamické meteorologie, reprezentované zejména pracemi Kočina a Blinové, se jako první zabývali řešením problematiky frontálních vln představitelé norské, bergenské, meteorologické školy soustředěné kolem Vilhelma a Jacoba Bjerknese a Halvora Solberga. Z jejich prací citujme například [32]; čtenáři by snad mohla být v Česku nejdostupnější práce [33]. Solbergův přístup k frontálním vlnám je v česky psané odborné literatuře rekapitulován v hlavních rysech v práci [5].



Obr. 11.3 Stabilita frontálního rozhraní vůči vlnovým poruchám konečné délky. Sestrojeno podle [24].

S postupným rozvojem numerických předpovědních metod počasí a stále větší dostupností družicových snímků oblačnosti, ustoupila analýza frontálních vln poněkud do pozadí. Navíc podle moderních představ dynamické meteorologie je dominantním faktorem uplatňujícím se při vzniku mimotropických cyklon takzvaná baroklinní instability, o které pojednáváme na jiném místě této publikace.

## 12 INERČNÍ INSTABILITA

Předmětem našeho zájmu nyní bude opět instabilita, která se hojně uplatňuje v zemské atmosféře a při vysvětlení jejího základního mechanismu musíme vzít do úvahy rotaci Země. Jedná se tedy o instabilitu většího měřítka než je například Rayleighova-Bénardova konvekce. Inerční instabilita je geofyzikálním protějškem tzv. *Taylorovy-Couettovy instability* [22], nazývané též *odstředivá instabilita* [8], studované na počátku 20. století Taylorem a Rayleighem, při které hraje ústřední roli odstředivá síla. Ve 30. a 40. letech minulého století se norská bergenská meteorologická škola snažila vysvětlit cyklogenezi právě pomocí inerční instability. Ovšem s nástupem teorie baroklinní instability od konce 40. let, která se etablovala jako zásadní mechanismus cyklogeneze, zájem o inerční instabilitu poněkud opadl. Poslední doba však přinesla jistou renesanci zájmu o inerční instabilitu v geofyzikální hydrodynamice a lze se s ní setkat při popisu celé řady jevů, a to od dynamiky mezoměřítkové konvekce, monzunů, generování a zániku vln ve stratosféře a mezosféře, až po rovníkovou oceánografii [28].

V dalším textu nejprve vysvětlíme základní mechanismus inerční instability pomocí podobných úvah, které se provádějí u metody částice při hodnocení stability vertikálního zvrstvení atmosféry, a poté získaná stabilitní kritéria zobecníme na nelineární případ.

### 12.1 Základní mechanismus inerční instability

Základní mechanismus inerční instability popíšeme metodou částice, kterou budeme aplikovat v horizontální, přesněji řečeno v kvazihorizontální rovině. Tyto úvahy jsou spojené zejména se jménem J. Bjerknese [34]. Jako základní stav budeme uvažovat zonální geostrofické proudění. Součástí tohoto proudění necht' je vzduchová částice, která se na počátku nachází v poloze

$y_0$  a je v rovnováze s uvedeným základním geostrofickým prouděním. Tuto vzduchovou částici vychýlíme do polohy  $y_0 + \Delta y$  a budeme sledovat, zda se bude s časem tato částice od své rovnovážné polohy v  $y_0$  vzdalovat – pak budeme hovořit o instabilitě, nebo navracet zpět – pak budeme hovořit o stabilitě. Rychlost zonálního geostrofického proudění označme jako  $u_g$ , zatímco složky rychlosti sledované vzduchové částice budeme značit  $u, v$ . Vhodnou souřadnicovou soustavou pro vyšetřování našeho problému je tzv. standardní souřadnicová soustava, ve které osa  $x$  míří zonálním směrem na východ, osa  $y$  k severu a osa  $z$  zbývající dvě doplňuje tak, aby zvolená soustava byla pravotočivá.

Budeme předpokládat, že

1. Vzduchová částice si při svém pohybu nevyměňuje s okolním vzduchem teplo; omezujeme se tedy pouze na adiabatické procesy.

2. Tlak uvnitř vzduchové částice se přizpůsobuje tlaku okolního vzduchu; k tomu je postačující, aby rychlost vzduchové částice byla menší než rychlost zvuku.

Rovnice, které popisují základní geostrofické zonální proudění, mají tvar

$$u_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (12.1)$$

kde  $f = 2\Omega \sin\varphi$  představuje Coriolisův parametr,  $\varphi$  je zeměpisná šířka,  $p$  a  $\rho$  mají obvyklý význam tlaku a hustoty vzduchu. Pohybové rovnice vzduchové částice, jejíž pohyb budeme studovat, můžeme psát následovně

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu. \quad (12.2)$$

Dosadíme-li za  $(1/\rho)\partial p/\partial x$  a  $(1/\rho)\partial p/\partial y$  z rovnic (12.1) do (12.2), získáme

$$\frac{du}{dt} = fv, \quad \frac{dv}{dt} = f(u_g - u). \quad (12.3)$$

V uvedených vztazích jsme předpokládali, že hustota vzduchové částice je stejná jako hustota okolního vzduchu.

Vychýlíme-li nyní vzduchovou částici z polohy  $y_0$ , například v kladné směru osy  $y$  do polohy  $y_0 + \Delta y$ , znamená to že  $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{y_0} > 0$  a  $v_0 > 0$ . Zonální

rychlost vzduchové částice v nové poloze  $y_0 + \Delta y$  určíme integrací první rovnice (12.3):



$$u(y_0 + \Delta y) = u(y_0) + f_0 v_0 \Delta t = u_g(y_0) + f_0 v_0 \Delta t, \quad (12.4)$$

kde index „0“ označuje hodnoty veličin v poloze  $y_0$  a  $\Delta t$  představuje čas, během něhož dojde k přemístění vzduchové částice. Coriolisův parametr považujeme v našich úvahách za neproměnný a jeho hodnotu rovněž vztahujeme k poloze  $y_0$ .

Geostrofické zonální proudění má v poloze  $y_0 + \Delta y$  rychlost, kterou určíme pomocí prvních dvou členů Taylorova rozvoje

$$u_g(y_0 + \Delta y) = u_g(y_0) + \left( \frac{\partial u_g}{\partial y} \right)_{y_0} v_0 \Delta t, \quad (12.5)$$

kde  $\Delta y = v_0 \Delta t$ . Z tohoto postupu je evidentní, že vzdálenost  $\Delta y$  nemůže být příliš velká, abychom se ve vztahu (12.5) nedopustili příliš velké chyby zanedbáním menších členů Taylorova rozvoje. Dosazením (12.4) a (12.5) do druhé rovnice (12.3) získáme

$$\left( \frac{dv}{dt} \right)_{y_0 + \Delta y} = f_0 [u_g(y_0 + \Delta y) - u(y_0 + \Delta y)] = f_0 \left( \frac{\partial u_g}{\partial y} - f_0 \right)_{y_0} v_0 \Delta t. \quad (12.6)$$

Vezmeme-li v úvahu, že na severní polokouli je  $f_0 > 0$  a dále, že  $\Delta t > 0$ , a protože jsme volili  $v_0 > 0$ , je zřejmé, že

$$\left( \frac{dv}{dt} \right)_{y_0 + \Delta y} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \Leftrightarrow f_0 - \left( \frac{\partial u_g}{\partial y} \right)_{y_0} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0. \quad (12.7)$$

Čtenář sběhlý v problematice dynamické meteorologie okamžitě vidí, že na pravé straně (12.7) vystupuje absolutní vorticity základního zonálního proudění  $\eta_0$ :

$$\eta_0 \equiv f_0 - \left( \frac{\partial u_g}{\partial y} \right)_{y_0}. \quad (12.8)$$

Ze vztahu (12.7) je patrné, že je-li  $(dv/dt)_{y_0 + \Delta t} > 0$ , vzduchová částice pokračuje ve svém pohybu a s rostoucím časem se vzdaluje od své původní polohy  $y_0$ , jedná se tedy o instabilní případ. Naopak je-li  $(dv/dt)_{y_0 + \Delta t} < 0$ , je vzduchová částice navracena zpět do své původní polohy a tento stav můžeme charakterizovat jako stabilní. V případě  $(dv/dt)_{y_0 + \Delta t} = 0$  hovoříme

o neutrálním stavu. S přihlédnutím ke vztahu (12.8) pro absolutní vorticitu můžeme právě uvedené stabilitní poměry přehledně zapsat takto:

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{– inerční stabilita:} \\
 \left( \frac{dv}{dt} \right)_{y_0+\Delta y} < 0 \Leftrightarrow \eta_0 \equiv f_0 - \left( \frac{\partial u_g}{\partial y} \right)_{y_0} > 0, \\
 \text{– inerční instabilita:} \\
 \left( \frac{dv}{dt} \right)_{y_0+\Delta y} > 0 \Leftrightarrow \eta_0 \equiv f_0 - \left( \frac{\partial u_g}{\partial y} \right)_{y_0} < 0, \\
 \text{– inerčně neutrální podmínky:} \\
 \left( \frac{dv}{dt} \right)_{y_0+\Delta y} = 0 \Leftrightarrow \eta_0 \equiv f_0 - \left( \frac{\partial u_g}{\partial y} \right)_{y_0} = 0.
 \end{array} \right\} \quad (12.9a)$$

Stejné podmínky bychom obdrželi, pokud bychom vychýlili vzduchovou částici v počátečním okamžiku  $t = 0$  nikoliv v kladném (tedy k severu), nýbrž v záporném (tedy k jihu) směru osy  $y$ . Stabilitní analýzu pro jižní polokouli, kde  $f_0 < 0$ , si čtenář jistě provede bez větších obtíží sám.

Poznámka 5: vezmeme-li v úvahu, že relativní vorticity  $\xi_g$  základního zonálního geostrofoického proudění  $u_g(y)$  je dána vztahem

$$\xi_g = -\frac{\partial u_g}{\partial y},$$

můžeme kritéria pro inerční stabilitu (12.9a) psát s přihlédnutím k rovnici (12.6) v elegantním tvaru, kterému bývá v některých monografiích dávána přednost:

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{– inerční stabilita:} \quad [f(f + \xi_g)]_{y_0} > 0, \\
 \text{– inerční instabilita:} \quad [f(f + \xi_g)]_{y_0} < 0, \\
 \text{– inerční neutralita:} \quad [f(f + \xi_g)]_{y_0} = 0.
 \end{array} \right\} \quad (12.9b)$$

## 12.2 Nelineární zobecnění podmínek inerční instability

Uvědomme si, že při odvození kritérií pro inerční stabilitu (12.9) jsme brali v úvahu pouze lineární změnu zonální rychlosti vzduchové částice a zonální geostrofické rychlosti základního proudění. Také jsme nebrali zřetel na změnu Coriolisova parametru v severojižním směru. Získaná kritéria (12.9) jsou pak platná pouze v nevelké vzdálenosti vzduchové částice od její výchozí polohy  $y_0$ . Nyní stabilitní kritéria zobecníme, sledující úvahy publikované v [4], na nelineární případ. Je výhodné tato kritéria formulovat vzhledem ke kinetické energii meridionálně vychýlené vzduchové částice. Jestliže tato energie s časem poroste, budeme hovořit o inerční instabilitě, naopak bude-li s časem klesat, půjde o inerčně stabilní případ.

Derivujme totálně podle času druhou z rovnic (12.3):

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{df}{dt}(u - u_g) + f \left( \frac{du}{dt} - \frac{du_g}{dt} \right) = 0, \quad (12.10)$$

kde celkovou změnu Coriolisova parametru můžeme vyjádřit jako

$$\frac{df}{dt} = v \frac{\partial f}{\partial y} = v \frac{\partial}{\partial y} (2\Omega \sin \varphi) = \frac{2\Omega v \cos \varphi}{a} = v\beta. \quad (12.11)$$

V posledním vztahu představuje  $\beta = 2\Omega \cos \varphi / a$  takzvaný Rossbyho parametr,  $a$  značí poloměr Země a  $\varphi$  zeměpisnou šířku.

Individuální změna zonálního geostrofického proudění, které se nemění se zeměpisnou délkou ani s časem, je v soustavě pevně spojené s pohybující se vzduchovou částicí rovna

$$\frac{du_g}{dt} = v \frac{\partial u_g}{\partial y}. \quad (12.12)$$

Nyní do rovnice (12.10) dosadíme za  $u - u_g$  a  $du/dt$  z rovnic (12.3), za  $df/dt$  z rovnice (12.11) a za  $du_g/dt$  (12.12). Tím získáme vztah

$$\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{v}{a} \frac{dv}{dt} + 2\Omega v \sin \varphi \left( f - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) = 0. \quad (12.13)$$

Vypočtěme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sin \varphi} \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sin \varphi} v \frac{dv}{dt} \right) = \frac{1}{\sin \varphi} \left[ \frac{d}{dt} \left( v \frac{dv}{dt} \right) \sin \varphi - v \frac{dv}{dt} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right].$$

Protože

$$\frac{d\varphi}{dt} = v \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{v}{a}, \quad \frac{d}{dt} \left( v \frac{dv}{dt} \right) = \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + v \frac{d^2v}{dt^2},$$

můžeme psát

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sin\varphi} \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} \right) = \frac{1}{\sin\varphi} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{v}{\sin\varphi} \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \frac{v^2}{a} \frac{dv}{dt}. \quad (12.14)$$

Vynásobíme-li rovnici (12.13) výrazem  $v/\sin\varphi$  a dosadíme-li do ní prostřednictvím (12.14), získáme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sin\varphi} \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} \right) = \frac{1}{\sin\varphi} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 - 2\Omega v^2 \left( f - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right). \quad (12.15)$$

Poslední rovnici integrujme od počátečního okamžiku  $t_0$  do nějakého času  $t$ . Tedy

$$\frac{1}{\sin\varphi} \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = \left( \frac{1}{\sin\varphi} \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} \right)_{t_0} + \int_{t_0}^t \left[ \frac{1}{\sin\varphi} \left( \frac{dv}{dt'} \right)^2 - 2\Omega v^2 \left( f - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \right] dt'. \quad (12.16)$$

Na levé straně poslední rovnice se objevuje změna měrné kinetické energie  $\frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right)$  vychýlené částice v čase  $t$ . Pravá strana obsahuje počáteční změnu této energie  $\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right]_{t_0}$ , která je kladná, protože jsme přepokládali, že

vzduchová částice je na počátku v klidu,  $v(t_0) = 0$ . Pohyb vzduchové částice bude stabilní, pokud její kinetická energie bude klesat, to znamená  $\frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) < 0$ . Naopak pokud  $\frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) > 0$ , bude kinetická energie vzduchové částice s časem růst, což odpovídá instabilní situaci. Druhý ze jmenovaných případů nastává, je-li

$$\eta \equiv f - \frac{\partial u_g}{\partial y} < 0, \quad (12.17a)$$

protože pak jsou všechny členy v rovnici (12.16) kladné (na severní polokouli, kde  $\sin\varphi > 0$ ). Podmínka (12.17a) představuje postačující podmínku inerční instability v nelineárním případě. Není však možné podobným způsobem formulovat postačující podmínku stability. Je-li totiž

$$\eta \equiv f - \frac{\partial u_g}{\partial y} > 0, \quad (12.17b)$$

není vůbec jasné, zda je integrál na pravé straně rovnice (12.16) kladný nebo záporný. Avšak je-li  $\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) > 0$ , musí být tento integrál záporný, což nastává v případě, že platí vztah (12.17b) a navíc musí druhý člen ve zmíněném integrálu svoji absolutní hodnotou převyšovat první člen v tomto integrálu. Kritérium (12.17b) tedy představuje nutnou podmínku inerční stability. Ještě si povšimněme možnosti, že je podél celé trajektorie vzduchové částice

$$\eta \equiv f - \frac{\partial u_g}{\partial y} = 0. \quad (12.17c)$$

Připomeňme, že v lineárním přiblížení tato situace odpovídala neutrálnímu, chcete-li indiferentnímu, případu. Pohledem na rovnici (12.16) však vidíme, že podrobnější rozbor, obohacený o nelineární prvky, neutrální situaci nepřipouští, protože při platnosti rovnosti (12.17c) je integrál ve vztahu (12.16) kladný a v důsledku toho kinetická energie vzduchové částice s časem roste. Nelineární rozbor tedy „převrací“ lineárně neutrální situaci na instabilní případ.

Inerční instabilita byla v geofyzikálním kontextu, jak již bylo částečně zmíněno v úvodu této kapitoly, pozorována v řadě atmosférických jevů celé řady měřítek, od bouřek a mezoměřítkových konvektivních systémů až po tryskové proudění. Pro stručný přehled odkazujeme čtenáře například na publikaci [28]. Závěrem této kapitoly se zastavme ve stručnosti právě u inerční instability tryskového proudění. Ve volné atmosféře bez tryskového proudění obvykle meridionální gradient zonálního proudění, v našem pojetí  $\partial u_g / \partial y$ , nebývá větší než  $10 \text{ ms}^{-1}$  na 100 km, tedy  $\partial u_g / \partial y \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . To je velikost srovnatelná s hodnotou Coriolisova parametru  $f$  ve středních zeměpisných šířkách (na  $45^\circ$  severní šířky je  $f \approx 1,04 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ). Odtud vyplývá, že oblasti bez tryskového proudění jsou inerčně stabilní (nebo „přinejhorším“ neutrální v intencích lineárního přístupu). Obrátíme-li pozornost k tryskovému proudění na severní polokouli, a to na severní stranu od

osy tryskového proudění, tedy  $\partial u_g / \partial y < 0$ , vidíme, že zde je  $\eta > 0$  a je tedy splněna nutná podmínka inerční stability. Severní strana od osy tryskového proudění má tedy tendenci být inerčně stabilní (i když musíme mít stále na paměti, že jde o nutnou podmínku stability). Naproti tomu na jižní straně od osy tryskového proudění je  $\partial u_g / \partial y > 0$ , a tedy při silném meridionálním gradientu rychlosti proudění může být tato oblast inerčně instabilní. Z toho vyplývá, že jižní strany tryskového proudění na severní polokouli jsou místem potenciální meteorologické aktivity.

## 13 SYMETRICKÁ INSTABILITA

V tomto oddíle vyložíme problematiku symetrické stability, respektive instability. Tento mechanismus má důležitou úlohu při formování oblačnosti a srážek subsynoptického měřítká, a to ve formě pásů širokých přibližně 10 až 50 km a dlouhých 100 až 500 km. Tato oblačnost, popřípadě srážky, bývají obvykle pozorovány v silně baroklinních oblastech v souvislosti s atmosférickými frontami, nicméně představují samostatné útvary. Je pro ně charakteristické, že se řadí do válečků rovnoběžných s vektorem průměrného gradientu rychlosti proudění. Pravděpodobným zdrojem vzniku uvedených útvarů je právě *symetrická instabilita* [3]. Alternativním názvem pro tento typ instability je *šikmá konvekce* (slantwise convection, viz například [35]).

V předchozích oddílech jsme se zabývali situací, kdy vzduchová částice byla stabilní při ryze vertikálním přemístění a oscilovala kolem své počáteční polohy s Brunt-Vaisalovou frekvencí; tento stav odpovídal stabilnímu vertikálnímu zvrstvení atmosféry. Také jsme popsali případ, kdy byla vzduchová částice stabilní vůči svému čistě horizontálnímu přemístění; pak jsme hovořili o inerční stabilitě. Je však možná také taková situace, kdy je zmíněná částice stabilní odděleně jak vůči ryze vertikálnímu, tak vzhledem k čistě horizontálnímu vychýlení ze své původní polohy, ovšem instabilní vůči přemístění v nakloněné (šikmé) rovině – odtud název šikmá konvekce.

Mechanismus symetrické instability popíšeme opět prostřednictvím metody částice a vzhledem k charakteru cirkulace ve formě již zmíněných válečků budeme předpokládat, že jak základní stav atmosféry, tak perturbace jsou nezávislé na jedné z horizontálních souřadnic, která tedy představuje osu symetrie proudění. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že touto osou je osa  $x$ , a tedy parciální derivace  $\frac{\partial}{\partial x}$  všech veličin je rovna nule. V takovém případě si můžeme vzduchovou částici představit ve formě válečku nebo prstence, který se rozprostírá ve směru osy  $x$  od  $-\infty$  do  $+\infty$ .

Tento váleček necht' je vložen do základního geostrofického proudění. Pokud se bude váleček vracet po vychýlení v šikmém směru do své původní polohy, budeme mluvit o symetrické stabilitě, bude-li se vzdalovat, situaci označíme za symetricky nestabilní. Přitom budeme předpokládat splnění obvyklých podmínek při aplikaci metody částice, tedy přizpůsobování tlaku uvnitř vzduchového válečku okolnímu tlaku a dále, že celý proces je adiabatický. Protože je odvození podmínky symetrické instability do jisté míry analogické například s odvozením podmínky inerční instability, dovolíme si postupovat poněkud rychleji a některé dílčí kroky při výpočtech vynecháme s tím, že podrobnosti odhalí jistě sám čtenář, nebo je nalezneme v některé z publikací [35, 36, 37]. Zejména na úvahách z první ze jmenovaných monografií je založen náš další postup.

Při rozboru se zaměříme na situaci na severní polokouli, kde je  $f > 0$ . Rovnice základního geostrofického proudění, do kterého je vzduchový váleček vložen a s nímž je na počátku v rovnováze, mají tvar shodný s rovnicemi (12.1), tedy

$$u_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (13.1)$$

Pohybové rovnice pro vzduchový váleček ve směru souřadnicových os  $x$  a  $y$  můžeme psát ve tvaru

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv = f(v - \underbrace{v_g}_{=0}) = fv = f \frac{dy}{dt}, \quad (13.2a)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu = f(u_g - u). \quad (13.2b)$$

Přemístíme-li nyní vzduchový váleček ve směru osy  $y$  o  $\Delta y$  a ve vertikální směru o  $\Delta z$  a budeme přitom předpokládat, že se od své výchozí polohy příliš nevzdálil, můžeme rychlost základního geostrofického proudění ve vztahu (13.2b) v nové poloze válečku aproximovat prvními členy Taylorova rozvoje. Ze vztahu (13.2b) pak dostáváme

$$\left( \frac{dv}{dt} \right)_{\substack{y_0 + \Delta y \\ z_0 + \Delta z}} = f \left[ u_g(y_0, z_0) + \left( \frac{\partial u_g}{\partial y} \right)_{y_0, z_0} \Delta y + \left( \frac{\partial u_g}{\partial z} \right)_{y_0, z_0} \Delta z - u \right]. \quad (13.3)$$

Časovou integrací rovnice (13.2a) dostáváme pro rychlost vzduchové trubice ve směru osy  $x$  v čase  $t$  výraz



$$u(t) = u_g(y_0, z_0) + f \Delta y. \quad (13.4)$$

Vzhledem k charakteru trubice rozprostírající se rovnoběžně s osou  $x$  od  $-\infty$  do  $+\infty$  by bylo příhodnější než o pohybu samotné trubice ve směru osy  $x$  mluvit o pohybu vzduchových částic uvnitř této trubice. Dosadíme-li za  $u$  v rovnici (13.3) vyjádření (13.4), obdržíme

$$\left( \frac{dv}{dt} \right)_{\substack{y_0 + \Delta y \\ z_0 + \Delta z}} = f \left[ \left( \frac{\partial u_g}{\partial z} \right)_{y_0, z_0} \Delta z - \left( f - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right)_{y_0, z_0} \Delta y \right]. \quad (13.5)$$

Jak si jistě čtenář všiml, neuvažujeme změny Coriolisova parametru  $f$ , neboť předpokládáme, že přemístění vzduchového válečku je dostatečně malé, a tedy i změny Coriolisova parametru jsou zanedbatelné. Vyjádřeme nyní v posledním vztahu vertikální gradient geostrofického zonálního proudění. Z poznámky v oddíle 17, nebo například z [3,5] vyplývá, že pro zmíněný vertikální gradient můžeme psát přibližný vztah

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{g}{f\theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}. \quad (13.6)$$

Vyjádřeme sklon izentropických ploch, tedy ploch o konstantní potenciální teplotě. Na takové ploše evidentně platí

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial y} dy + \frac{\partial \theta}{\partial z} dz \equiv 0 \quad (13.7)$$

a pro její sklon tedy postupně dostáváme

$$\left( \frac{dz}{dy} \right)_\theta = -\frac{\frac{\partial \theta}{\partial y}}{\frac{\partial \theta}{\partial z}} = \frac{f \frac{\partial u_g}{\partial z}}{g \frac{\partial \theta}{\partial z}}, \quad (13.8)$$

kde jsme využili vztahu (13.6).

Z dalšího kroku vyplyne, proč jsme vyjadřovali náklon plochy konstantní potenciální teploty. Přemístíme-li náš vzduchový váleček právě po této ploše, můžeme vztah (13.5) s přihlédnutím k (13.8) psát ve tvaru

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\substack{y_0+\Delta y \\ z_0+\Delta z}} = f \left\{ \left(\frac{\partial u_g}{\partial z}\right)_{y_0, z_0} f \frac{\left(\frac{\partial u_g}{\partial z}\right)_{y_0, z_0}}{g \frac{\partial \theta}{\partial z}} (\Delta y)_\theta - \left[ f - \left(\frac{\partial u_g}{\partial y}\right)_{y_0, z_0} \right] (\Delta y)_\theta \right\}. \quad (13.9)$$

Není obtížné nahlédnout, že v prvním členu ve složené závorce posledního vztahu vystupuje Richardsonovo číslo (viz vztahy (8.1) a (5.12)) a že člen v hranaté závorce (13.9) představuje absolutní vorticitu základního geostrofického proudění  $\eta_g = \xi_g + f = -\frac{\partial u_g}{\partial y} + f$ . Vědomi si těchto skutečností, můžeme dospět k rovnici pro zrychlení vzduchového válečku, vychýleného podél izentropické hladiny, ve směru osy  $y$ :

$$\frac{d^2}{dt^2} (\Delta y)_\theta + f^2 \left[ \frac{(\xi_g + f)}{f} - \frac{1}{Ri} \right] (\Delta y)_\theta = 0, \quad (13.10)$$

kde jsme využili faktu, že  $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\substack{y_0+\Delta y \\ z_0+\Delta z}} = \frac{d^2}{dt^2} (\Delta y)_\theta$ . Označme dále druhý člen v rovnici (13.10) jako  $\omega_s^2$ , tedy

$$\omega_s^2 \equiv f^2 \left[ \frac{(\xi_g + f)}{f} - \frac{1}{Ri} \right]. \quad (13.11)$$

Z diferenciálního počtu je dobře známo, že pokud je  $\omega_s^2 > 0$ , má řešení rovnice (13.10) tvar harmonických kmitů s kruhovou frekvencí  $\omega_s$ :

$$(\Delta y)_\theta = A_1 \cos \omega_s t + B_1 \sin \omega_s t, \quad (13.12)$$

kde  $A_1$  a  $A_2$  jsou integrační konstanty, které určíme z počátečních podmínek. To odpovídá symetrické stabilitě, kterou je možné s přihlédnutím k (13.11) charakterizovat nerovností

$$Ri > \frac{f}{\xi_g + f} \approx 1. \quad (13.13)$$

Je-li výraz v hranaté závorce v rovnici (13.10) záporný, má řešení této rovnice obecně tvar

$$(\Delta y)_\theta = A_2 e^{|\omega_s|t} + B_2 e^{-|\omega_s|t}, \quad (13.14)$$

kde  $A_2$  a  $B_2$  jsou opět integrační konstanty. Je zřejmé, že podle vztahu (13.14) by se vzduchový váleček vzdaloval od své počáteční polohy. Jednoduchými algebraickými úpravami se můžeme přesvědčit, že tato symetricky instabilní situace může nastat, je-li

$$Ri < \frac{f}{\xi_g + f} \approx 1. \quad (13.15)$$

Poslední vztah vyjadřuje nutnou podmínku symetrické instability. Připomeneme-li si definici Richardsonova čísla (8.1), je patrné, že při stabilním vertikálním zvrstvení atmosféry může symetrická instabilita nastat v případě, když je vertikální gradient základního proudění dostatečně velký, nebo v oblastech, kde je geostrofická vorticity  $\xi_g$  velmi malá popřípadě anticyklonální ( $\xi_g < 0$ ).

V elegantním tvaru lze nutnou podmínku symetrické instability vyjádřit prostřednictvím Ertelovy potenciální vorticity, definované vztahem (viz například [3, 10, 38])

$$\Pi_E = \frac{\nabla \times \mathbf{v} + f \mathbf{k}}{\rho} \cdot \nabla \theta, \quad (13.16)$$

kde  $\mathbf{k}$  představuje jednotkový vertikálně orientovaný vektor. Dosadíme-li do (13.6) za vektor rychlosti proudění  $\mathbf{v}$  vyjádření pro základní zonální geostrofické proudění, vypočteme gradient potenciální teploty  $\theta$  a provedeme sérii úprav, dostaneme

$$\Pi_E = \frac{f}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z} \left[ \frac{\xi_g + f}{f} - \frac{\left( \frac{\partial u_g}{\partial z} \right)^2}{\frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}} \right] = \frac{f}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z} \left( \frac{\xi_g + f}{f} - \frac{1}{Ri} \right). \quad (13.17)$$

Z poslední rovnice a z podmínky (13.15) vidíme, že při stabilním vertikálním zvrstvení atmosféry ( $\partial \theta / \partial z > 0$ ) můžeme nutnou podmínku inerční instability psát jednoduše jako

$$\Pi_E < 0. \quad (13.18)$$

Využijeme-li navíc vztahu mezi absolutní vorticitou v  $z$  systému, s nímž jsme dosud pracovali, a v  $\theta$  systému

$$\xi_g + f = (\xi_g + f)_\theta + \frac{f}{Ri},$$

vyplývá ze vztahu (13.17) pro Ertelovu potenciální vorticitu v  $\theta$  systému, že

$$\Pi_E = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z} (\xi_g + f)_\theta \quad (13.19)$$

a nutnou podmínkou symetrické instability ve stabilně vertikálně zvrstvené atmosféře je požadavek, aby na izentropické ploše byla absolutní vorticity záporná:

$$(\xi_g + f)_\theta < 0. \quad (13.20)$$

## 14 BAROTROPNÍ A BAROKLINNÍ INSTABILITA Z HLEDISKA PŘEMĚNY ENERGIE

Barotropní a baroklinní instabilita představují mechanismy, které obvykle zahrnují procesy synoptického až planetárního měřítka. Tyto mechanismy jsou primárními zdroji, díky kterým mohou narůstat původně malé poruchy objevující se v základním stavu atmosféry, například v podobě zonálního proudění, a to tak, že zmíněné poruchy čerpají energii pro svůj růst právě na úkor energie základního stavu. Z metodického hlediska bývá výhodné jak barotropní, tak baroklinní instabilitu studovat odděleně. V této kapitole však vyšetříme oba jevy současně pomocí energetických úvah. Uvidíme, že barotropní instabilita je spojena s horizontálním gradientem základního proudění, zatímco baroklinní instabilita se realizuje prostřednictvím vertikálního gradientu základního proudění. Odpovíme na otázku, za jakých podmínek získávají poruchy (perturbace) energii pro svůj růst.

V našich úvahách nebudeme pro jednoduchost uvažovat disipaci energie třením a omezíme se na adiabatické procesy. Vztahy budeme linearizovat vzhledem k perturbacím. Vyjdeme z následující soustavy „meteorologických“ rovnic v  $p$  systému:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial p} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + fv, \quad (14.1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - fu, \quad (14.1b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p}, \quad (14.1c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \omega \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{RT}{c_p p} \omega, \quad (14.1d)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (14.1e)$$

Jedná se postupně o dvě pohybové rovnice na izobarické ploše, rovnici hydrostatické rovnováhy, energetickou rovnici (první hlavní větu termodynamickou) a rovnici kontinuity. Jednotlivé proměnné mají obvyklý význam, snad jen připomeňme, že veličina, se kterou jsme se dosud v této knize nesetkali, je zobecněná vertikální rychlost  $\omega \equiv dp/dt$  a  $\phi$  představuje geopotenciál. Z uvažovaného tvaru pohybových rovnic je zřejmé, že pracujeme v synoptickém až planetárním měřítku (viz například [5]). Okrajové podmínky platící pro proudění budou

$$\omega = 0 \quad \text{pro} \quad p = 0, p = p_0, \quad (14.2a)$$

$$v = 0 \quad \text{pro} \quad y = -d, y = +d. \quad (14.2b)$$

K proudění tedy dochází v „kanálu“ s neprostupnými zonálně orientovanými hranicemi ve vzdálenosti  $y = \pm d$  od počátku souřadnicové soustavy. Tlak na zemském povrchu jsme označili jako  $p_0$ . Dále budeme předpokládat, že všechny hledané proměnné a jejich derivace jsou periodické podél osy  $x$  mířící směrem na východ s periodou odpovídající vzdálenosti  $L$ , to znamená, že, symbolicky zapsáno,

$$X(x) = X(x \pm L). \quad (14.2c)$$

Základní stav našeho modelu bude charakterizován veličinami  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{\phi}$ , které splňují vztahy

$$\bar{u} = \bar{u}(y, p), \quad \bar{v} = 0, \quad \bar{\omega} = 0, \quad (14.3a)$$

$$\bar{u} = -\frac{1}{f} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial p} = \frac{R\bar{T}}{p}(y, p) \quad (14.3b)$$

a představuje tak zonální geostrofické proudění, které je s přihlédnutím k (14.1c) v hydrostatické rovnováze.

Na základní proudění nechť jsou superponovány poruchy v poli rychlosti proudění ( $u', v', \omega'$ ), teploty  $T'$  a geopotenciálu  $\phi'$  závisící na čase i na prostorových souřadnicích. Výsledný stav bude popsán veličinami

$$\begin{aligned} \bar{u}(y, p) + u'(x, y, p, t), \quad v'(x, y, p, t), \quad \omega'(x, y, p, t), \\ \bar{T}(y, p) + T'(x, y, p, t), \quad \bar{\phi}(y, p) + \phi'(x, y, p, t). \end{aligned} \quad (14.4)$$

Přítom předpokládáme, že poruchové proměnné jsou alespoň o řád menší než veličiny popisující základní stav.

Vyjádření (14.4) nyní dosadíme do výchozích rovnic (14.1), ve kterých zanedbáme členy obsahující dvě a více veličin popisujících perturbace. Naznačený postup předvedeme na pohybové rovnici ve směru souřadnicové osy  $x$ , pro kterou dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{u} + u') + (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u} + u') + v' \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u} + u') + \omega' \frac{\partial}{\partial p}(\bar{u} + u') = \\ = - \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\phi} + \phi') + fv', \end{aligned}$$

což rozepsáno na jednotlivé členy dává rovnici:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}}_{=0} + \frac{\partial u'}{\partial t} + \underbrace{\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}}_{=0} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \underbrace{u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{u' \frac{\partial u'}{\partial x}}_{\text{nelin.}} + v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \underbrace{v' \frac{\partial v'}{\partial y}}_{\text{nelin.}} + \omega' \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} + \underbrace{\omega' \frac{\partial u'}{\partial p}}_{\text{nelin.}} = \\ = - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} - \frac{\partial \phi'}{\partial x} + fv'. \end{aligned}$$

Vynecháním nulových členů a zanedbáním členů nelineárních vzhledem k perturbacím obdržíme

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \omega' \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} = - \frac{\partial \phi'}{\partial x} + fv'. \quad (14.5a)$$

Obdobným způsobem získáme i zbývající rovnice pro perturbace:

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} = - \frac{\partial \phi'}{\partial y} - fv', \quad (14.5b)$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial p} = - \frac{RT'}{p}, \quad (14.5c)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial T'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \omega' \frac{\partial \bar{T}}{\partial p} + \omega' \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial p} - \frac{1}{c_p} \frac{R\bar{T}}{p} \right) = 0, \quad (14.5d)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial \omega'}{\partial p} = 0. \quad (14.5e)$$

Definujme kinetickou  $K'$  a dostupnou potenciální energii  $A'$  poruch takto [39]:

$$K' \equiv \frac{1}{2} \int_V (u'^2 + v'^2) dV, \quad (14.6)$$

$$A' \equiv \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{\sigma} \frac{R^2}{p^2} T'^2 dV, \quad (14.7)$$

kde  $\int_V \dots dV$  značí integraci přes oblast ohraničenou izobarickými hladinami  $p_0$  a  $p=0$ , v meridionálním směru hranicemi  $y=d$  a  $y=-d$ , v zonálním směru jednou periodou vlnové poruchy o vlnové délce  $L$ . Symbol  $\sigma$  představuje parametr statické stability atmosféry definovaný pomocí měrné hustoty  $\alpha$  a potenciální teploty  $\theta$  vztahem  $\sigma \equiv -\frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$ .

Časová změna kinetické energie poruch je rovna

$$\frac{\partial K'}{\partial t} = \int_V \left( u' \frac{\partial u'}{\partial t} + v' \frac{\partial v'}{\partial t} \right) dV.$$

Vynásobíme-li rovnici (14.5a) veličinou  $u'$ , rovnici (14.5b) veličinou  $v'$  a takto vzniklé vztahy dosadíme do naposledy uvedené rovnice, získáme

$$\frac{\partial K'}{\partial t} = - \int_V \left( u'v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + u'\omega' \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} + u' \frac{\partial \phi'}{\partial x} + v' \frac{\partial \phi'}{\partial y} + \bar{u}u' \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{v}v' \frac{\partial v'}{\partial x} \right) dV.$$

Integraci per partes se můžeme přesvědčit, že integrály posledních dvou výrazů předchozí rovnice jsou rovny nule díky okrajovým podmínkám (14.2). Dále integrujme per partes třetí a čtvrtý člen poslední rovnice:

$$\begin{aligned} \int_V \left( u' \frac{\partial \phi'}{\partial x} + v' \frac{\partial \phi'}{\partial y} \right) dV &= - \int_V \phi' \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) dV \\ &= \int_V \phi' \frac{\partial \omega'}{\partial p} dV = \int_V \omega' \frac{\partial \phi'}{\partial p} dV = \int_V \frac{R}{p} \omega' T' dV, \end{aligned}$$

kde jsme opět přihlédlí k okrajovým podmínkám (14.2), rovnici kontinuity (14.5e) a rovnici hydrostatické rovnováhy (14.5c). To tedy znamená, že pro změnu kinetické energie perturbací můžeme psát



$$\frac{\partial K'}{\partial t} = - \underbrace{\int_V u'v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dV}_{\substack{\bar{K} \leftrightarrow K' \\ \text{barotropní}}} - \underbrace{\int_V u'\omega' \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} dV}_{\substack{\bar{K} \leftrightarrow K' \\ \text{baroklíní}}} - \underbrace{\int_V \frac{R}{p} \omega' T' dV}_{K' \leftrightarrow A'}. \quad (14.8)$$

Časová změna potenciální energie perturbací je rovna

$$\frac{\partial A'}{\partial t} = \int_V \frac{1}{\sigma} \frac{R^2}{p^2} T' \frac{\partial T'}{\partial t} dV.$$

Vynásobme rovnici (14.5d) veličinou  $T'$  a použijeme-li definici parametru statické stability spolu s definicí potenciální teploty, potom po dosazení do poslední rovnice můžeme psát pro změnu dostupné potenciální energie perturbací

$$\frac{\partial A'}{\partial t} = \int_V \frac{1}{\sigma} \frac{R^2}{p^2} \left( -\bar{u}T' \frac{\partial T'}{\partial x} - v'T' \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \frac{\sigma p}{R} \omega'T' \right) dV.$$

Integrací per partes se lze přesvědčit, že první člen v předchozí rovnici vymizí díky okrajovým podmínkám (14.2). Poté dostáváme

$$\frac{\partial A'}{\partial t} = - \underbrace{\int_V \frac{1}{\sigma} \frac{R^2}{p^2} T'v' \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} dV}_{\substack{\bar{A} \leftrightarrow A' \\ \text{baroklíní}}} + \underbrace{\int_V \frac{R}{p} \omega'T' dV}_{K' \leftrightarrow A'}. \quad (14.9)$$

První a druhý člen na pravé straně rovnice (14.8) reprezentuje barotropní a baroklíní přeměnu kinetické energie  $\bar{K}$  základního zonálního proudění na kinetickou energii poruch  $K'$  (nebo opačně). Instabilita, která závisí na horizontálním gradientu základního proudění, se nazývá *barotropní instabilita*. Třetí člen na pravé straně rovnice (14.8) se objevuje i ve vztahu (14.9), ovšem s opačným znaménkem, a reprezentuje transformaci mezi *dostupnou potenciální energií*<sup>\*)</sup>  $A'$  a kinetickou  $K'$  energií poruch. První člen na pravé straně rovnice (14.9) popisuje přechod dostupné potenciální energie mezi základním stavem a poruchami. Tato transformace se realizuje prostřednictvím mechanismu baroklíní instability, protože gradient teploty  $\partial \bar{T} / \partial y$  je s vertikálním stříhem větru  $\partial \bar{u} / \partial p$  spojen prostřednictvím rovnice ter-

<sup>\*)</sup> Skutečně hovoříme o přeměně dostupné potenciální energie. Je totiž dobře známo, že jen malá část celkové potenciální energie atmosféry se může transformovat v kinetickou energii. Těto části potenciální energie říkáme právě dostupná potenciální energie. Bližší viz například [40].

málního větru (viz například [5]), v našem případě  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial p} = -\frac{\alpha}{fT} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$ . O insta-

bilitě závisující na vertikálním gradientu proudění hovoříme jako o *baroklinní instabilitě*. Ta má podle rovnic (14.8), (14.9) a díky úvahám o termálním větru dva zdroje – jak je ve zmíněných rovnicích vyznačeno. Pedlosky však [10] upozorňuje na to, že při kvazigeostrofických pohybech velkého měřítka jsou vertikální Reynoldsova napětí  $u'w'$  tak malá, že jejich vzájemné působení s vertikálním gradientem rychlosti proudění představuje zanedbatelný zdroj perturbační kinetické energie a člen obsahující  $u'w'(\partial \bar{u}/\partial p)$  lze v rovnici (14.8) zanedbat ve srovnání s barotropním členem  $u'v'(\partial \bar{u}/\partial y)$ . Tento barotropní člen je navíc menší ve srovnání s posledním členem v rovnici (14.8), resp. (14.9). Z výše uvedeného je možné učinit závěr, že pro pohyby velkého měřítka ve středních zeměpisných šířkách je hlavním zdrojem kinetické energie perturbací, tedy instabilní situace, dostupná potenciální energie perturbací, která je čerpána z dostupné potenciální energie základního zonálního proudění.

Shrnuto jinými slovy: v ryze barotropním případě je zdrojem kinetické energie perturbací kinetická energie základního zonálního proudění, zatímco v baroklinní atmosféře je tímto zdrojem zejména dostupná potenciální energie základního stavu, která se v kinetickou energii perturbací přeměňuje přes mezičlánek, představovaný dostupnou potenciální energií perturbací (poslední člen v rovnicích (14.8) a (14.9)).

V dalších kapitolách této knihy budeme studovat případy barotropní a baroklinní atmosféry odděleně, kdy existuje vždy jen jeden nenulový gradient rychlosti proudění; buď horizontální, nebo vertikální. V obecném případě, kdy jsou nenulové oba dva gradienty rychlosti proudění, je pro instabilitu pochopitelně nutné, aby součet zdrojů kinetické energie poruch byl kladný. Jsou celkem tři možnosti, jak toto splnit. Jednak v triviálním případě mohou být kladné jak tok dostupné potenciální, tak i kinetické energie od základního proudění k perturbacím. Je možná i konfigurace, kdy baroklinní instabilní poruchy odebírají dostupnou potenciální energii základnímu stavu, ale současně generovaná horizontální Reynoldsova napětí spolu s horizontálním gradientem rychlosti zonálního proudění „navracejí“ kinetickou energii zpět, a tak dochází k zesilování gradientu hybnosti základního proudění. Tomu odpovídá situace, při které je jádro baroklinního proudění urychlováno a jeho okraje jsou zpomalovány. V instabilním případě musí energie odebíraná základnímu stavu převyšovat energii navrácenou zpět. Třetí možnost spočívá v tom, že dochází k rozvoji barotropní instability, která „vysvobozuje“ kinetickou energii základního stavu, ale

zároveň tok dostupné potenciální energie směřuje od fluktuací k základnímu stavu a zvětšuje tak jeho teplotní gradient. K celkové instabilitě je pak nutné, aby barotropní instabilita, pokud jde o toky energie, převýšila baroklinní stabilitu.

# 15 FORMULACE ROVNIC PRO STUDIUM STABILITY KVAZIGEOSTROFICKÝCH ATMOSFÉRICKÝCH POHYBŮ

Tak jako jsme na počátku knihy v pojednání o stabilitě proudění menších měřítek odvodili vztahy, které byly v dalších kapitolách naším východiskem, odvodíme nyní rovnice, které budou základem při studiu proudění velkých měřítek ve středních zeměpisných šířkách. Předmětem našeho zájmu bude barotropní a baroklinní instabilita, které jsme z energetického hlediska prozkoumali v předešlé kapitole. Poměrně dobře do našeho rámce zapadá i výklad o inerční instabilitě, jejíž mechanismus byl v kapitole 12 vyložen tak, že jej můžeme považovat i za vysvětlení základního mechanismu barotropní instability. Naším hlavním záměrem v následujících částech knihy bude vyložit mechanismus stability a instability pohybů synoptického měřítka ve středních zeměpisných šířkách a ukázat, za jakých podmínek se tyto pohyby mohou stát instabilní, což by signalizovalo možnost cyklogeneze.

Pohyby zmíněného měřítka můžeme popsat rovnicí vorticity v kvazi-geostrofickém přiblížení

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_p^2 \psi + \mathbf{v}_\psi \cdot \nabla_p (\nabla_p^2 \psi + f) = f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}, \quad (15.1)$$

kde  $\mathbf{v}_\psi = \mathbf{k} \times \nabla \psi$  je vektor rychlosti nedivergentního proudění, a dále termodynamickou rovnicí, která má v adiabatickém přiblížení tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) + \mathbf{v}_\psi \cdot \left( \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) + \frac{\sigma \omega}{f_0} = 0. \quad (15.2)$$

V těchto rovnicích  $\psi$  představuje proudovou funkci a  $f_0$  je hodnota Coriolisova parametru  $f$  na referenční střední zeměpisné šířce  $\varphi_0$ , obvykle volené jako  $45^\circ$  severní šířky. Z obou rovnic je patrné, že nadále budeme pracovat v  $p$  systému a standardní souřadnicové soustavě. Čtenáře, který

není seznámen s odvozením uvedených rovnic, odkazujeme na některou z následujících publikací [3,10,41,42]. Poznamenejme ještě, že dále budeme předpokládat zjednodušený vztah mezi geopotenciálem  $\phi$  a proudovou funkcí  $\phi = f_0 \psi$ .

Vynásobme rovnici (15.2) výrazem  $f_0^2/\sigma$  a poté derivujme parciálně podle  $p$ . Naznačeným postupem dostaneme výraz

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) \right] + \mathbf{v}_\psi \cdot \nabla_p \left[ f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) \right] = -f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}.$$

Poslední rovnici sečteme s rovnicí (15.1), čímž získáme

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \nabla_p^2 \psi + f_0 \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) \right] + \mathbf{v}_\psi \cdot \nabla_p \left[ \nabla_p^2 \psi + f + f_0 \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) \right] = 0, \quad (15.3a)$$

kde můžeme označit

$$\Pi = \nabla_p^2 \psi + f + f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right). \quad (15.3b)$$

Veličinu  $\Pi$  nazýváme kvazigeostrofickou potenciální vorticitou<sup>\*)</sup> a (15.3a) rovnici kvazigeostrofické potenciální vorticity.

Předpokládejme, že základním stavem je ryze zonální proudění, popsané geostrofickou proudovou funkcí  $\bar{\psi}(y, p)$ , které odpovídá rychlost proudění

$$U = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}(y, p). \quad (15.4)$$

Na základní stav necht' jsou v poli proudění superponovány malé poruchy, popsané perturbační proudovou funkcí  $\psi'(x, y, p, t)$ ,  $|\psi'| \ll |\bar{\psi}|$ . Výsledné pole proudění je pak charakterizováno proudovou funkcí, která je součtem proudové funkce základního stavu a poruchové proudové funkce:

$$\psi(x, y, p, t) = \bar{\psi}(y, p) + \psi'(x, y, p, t). \quad (15.5)$$

Dosadíme-li (15.4) a (15.5) do (15.3), získáme

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) q' + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial y} + J(\psi', q') = 0, \quad (15.6)$$

<sup>\*)</sup> Poznamenejme, že ve druhé části knihy používáme místo označení „potenciální vorticity“ „potenciálový vír“.

kde

$$q' = \nabla_p^2 \psi' + f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right) \quad (15.7)$$

je perturbační potenciální vorticity a veličina

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial U}{\partial p} \right) \quad (15.8)$$

představuje meridionální gradient potenciální vorticity základního stavu  $\bar{\Pi}$ ,

$$\bar{\Pi} = \nabla_p^2 \bar{\psi} + f + f_0^2 \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial p} \right). \quad (15.9)$$

Vzhledem k tomu, že všechny poruchové veličiny považujeme v absolutní hodnotě za menší alespoň o řád než jim odpovídající veličiny základního stavu, můžeme v prvním přiblížení v rovnici (15.6) zanedbat všechny členy, které jsou nelineární vzhledem k poruchám. Takovým členem je jakobián  $J(\psi', q')$ . Linearizovaná forma rovnice potenciální vorticity poruch je

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) q' + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial y} = 0. \quad (15.10)$$

V souladu s metodou normálních módů položíme opět,

$$\psi' = \hat{\psi}(y, p) e^{ik(x-ct)} \quad (15.11)$$

a dosadíme toto vyjádření do rovnice (15.10), kterou je pak možno psát následovně:

$$(U - c) \left[ \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial y^2} - k^2 \hat{\psi} + f_0^2 \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial p} \right) \right] + \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial y} \hat{\psi} = 0. \quad (15.12)$$

Analogicky upravíme i termodynamickou rovnici. Do vztahu (15.2) dosadíme pomocí (15.4) a (15.5):

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial p} - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial p} + J \left( \psi', \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right) + \frac{\sigma \omega}{f_0} = 0. \quad (15.13)$$

Poslední rovnici linearizujeme opět zanedbáním jakobiánu  $J\left(\psi', \frac{\partial \psi'}{\partial p}\right)$ .  
Tzn., že

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial \psi'}{\partial p} - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial p} + \frac{\sigma \omega}{f_0} = 0, \quad (15.14)$$

kde perturbační proudovou funkci  $\psi'$  vyjádříme vztahem (15.11) a obdobně položíme

$$\omega = \hat{\omega}(p) e^{ik(x-ct)}. \quad (15.15)$$

Pomocí vztahů (15.4), (15.11) a (15.15) přejde rovnice (15.14) na tvar

$$ik(U-c) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial p} - ik \frac{\partial U}{\partial p} \hat{\psi} + \frac{\sigma \hat{\omega}}{f_0} = 0. \quad (15.16)$$

Rovnice (15.12) a (15.16) tvoří vztahy, které v dalším textu použijeme při zkoumání stability kvazigeostrofických pohybů.

## 16 NUTNÁ PODMÍNKA BAROTROPNÍ INSTABILITY

V této kapitole odvodíme nutnou podmínku barotropní instability v rotující atmosféře, která je jistým zobecněním Rayleighova teorému. Jako východisko nám poslouží rovnice potenciální vorticity (15.12), ovšem v barotropním přiblížení. Budeme tedy uvažovat ryze barotropní základní stav se zonální rychlostí proudění závisící pouze na meridionální souřadnici  $U = U(y)$  a amplitudovou funkci poruch  $\hat{\psi}(y)$ , která bude funkcí rovněž jen souřadnice  $y$ . Za těchto předpokladů přejde rovnice potenciální vorticity (15.12) na tvar

$$(U - c) \left( \frac{d^2 \hat{\psi}}{dy^2} - k^2 \hat{\psi} \right) + \left( \beta - \frac{d^2 U}{dy^2} \right) \hat{\psi} = 0. \quad (16.1)$$

Nechť je proudění omezeno neprostupnými hranicemi rovnoběžnými s osou  $x$ , která je orientovaná směrem k východu rovnoběžně se základním zonálním prouděním. Neprostupné hranice situujme do vzdálenosti  $y = -d$  a  $y = d$  rovnoběžně s osou  $x$ . Na zmíněných neprostupných hranicích platí následující okrajové podmínky

$$\hat{\psi}(y = \pm d) = 0. \quad (16.2)$$

Rovnici (16.1) vynásobme komplexně sdruženou funkcí  $\hat{\psi}^*$  k  $\hat{\psi}$ :

$$(U - c) \left( \hat{\psi}^* \frac{d^2 \hat{\psi}}{dy^2} - k^2 \hat{\psi} \hat{\psi}^* \right) + \left( \beta - \frac{d^2 U}{dy^2} \right) \hat{\psi} \hat{\psi}^* = 0. \quad (16.3)$$

První člen ve druhé závorce levé strany poslední rovnice upravíme pomocí



$$\frac{d}{dy} \left( \hat{\psi}^* \frac{d\hat{\psi}}{dy} \right) = \left| \frac{d\hat{\psi}}{dy} \right|^2 + \hat{\psi}^* \frac{d^2\hat{\psi}}{dy^2}$$

a po vydělení rovnice (16.3) pomocí  $(U - c)$  dostaneme

$$\frac{d}{dy} \left( \hat{\psi}^* \frac{d\hat{\psi}}{dy} \right) - \left| \frac{d\hat{\psi}}{dy} \right|^2 - k^2 |\hat{\psi}|^2 = \frac{d^2U/dy^2 - \beta}{U - c} |\hat{\psi}|^2. \quad (16.4)$$

Integrujeme-li poslední rovnici od  $-d$  do  $+d$  a přihlédneme-li k okrajovým podmínkám (16.2), obdržíme

$$\int_{-d}^d \left( \left| \frac{d\hat{\psi}}{dy} \right|^2 + k^2 |\hat{\psi}|^2 \right) dy = \int_{-d}^d \frac{(\beta - d^2U/dy^2)(U - c)^*}{|U - c|^2} |\hat{\psi}|^2 dy, \quad (16.5)$$

kde jsme na pravé straně vynásobili čitatele i jmenovatele funkcí  $(U - c)^*$ , tedy komplexně sdruženou veličinou k  $(U - c)$ . Rozložíme-li dále fázovou rychlost  $c$  na reálnou a imaginární složku,  $c = c_r + i c_i$ , můžeme rovnici (16.5) uvádět ve tvaru

$$\begin{aligned} \int_{-d}^d \left( \left| \frac{d\hat{\psi}}{dy} \right|^2 + k^2 |\hat{\psi}|^2 \right) dy &= \\ &= \int_{-d}^d \frac{(\beta - d^2U/dy^2)(U - c_r)}{|U - c|^2} |\hat{\psi}|^2 + i c_i \int_{-d}^d \frac{\beta - d^2U/dy^2}{|U - c|^2} |\hat{\psi}|^2. \end{aligned} \quad (16.6)$$

Porovnáním reálné a imaginární části v této rovnici zjistíme, že

$$c_i \int_{-d}^d \frac{d^2U/dy^2 - \beta}{|U - c|^2} |\hat{\psi}|^2 dy = 0. \quad (16.7)$$

Z posledního vztahu je evidentní, že pokud existuje silící instabilní porucha s  $c_i > 0$ , musí platit pro nějaké  $y_k$  ležící mezi  $-d$  a  $d$ , že

$$\left( \frac{d^2U}{dy^2} - \beta \right)_{y_k} = 0, \quad \text{pro } -d < y_k < d. \quad (16.8a)$$

Tato podmínka představuje nutnou podmínku barotropní instability. Naopak, je-li

$$\left( \frac{d^2U}{dy^2} - \beta \right) \neq 0, \quad \text{pro všechna } y: -d < y < d, \quad \text{pak musí být } c_i = 0. \quad (16.8b)$$

Podmínka (16.8b) je postačující podmínkou barotropní stability. Tyto stabilitní podmínky odvodil Kuo [30] a je možné je považovat za zobecnění Rayleighova teorému inflexního bodu z kapitoly 10.

Vezmeme-li v úvahu, že Rossbyho parametr  $\beta$  je definován jako meridionální gradient Coriolisova parametru  $f$ ,  $\beta = df/dy$ , a že relativní vorticity  $\bar{\xi}$  základního zonálního proudění je rovna  $\bar{\xi} = -(dU/dy)$ , můžeme podmínky (16.8) psát vzhledem k absolutní vorticitě  $\bar{\eta}$  základního stavu  $\bar{\eta} \equiv f - \frac{dU}{dy}$ :

– postačující podmínka barotropní stability

$$\left. \frac{d\bar{\eta}}{dy} \right|_{y_k} = 0 \quad \text{pro nějaké } y_k \text{ ležící mezi } -d \text{ a } d, \quad (16.9)$$

– nutná podmínka barotropní instability

$$\frac{d\bar{\eta}}{dy} \neq 0 \quad \text{pro všechna } y \text{ ležící mezi } -d \text{ a } d.$$

Slovně je možné například formulovat nutnou podmínku barotropní instability tak, že pokud je zonální barotropní proudění barotropně instabilní, potom má absolutní vorticity základního proudění mezi  $-d$  a  $+d$  inflexní bod. Analogicky lze formulovat i opačné tvrzení vyjadřující postačující podmínku barotropní stability.

Tak jako při analýze Rayleighovy rovnice (3.6) jsme získali opět „jen“ nutnou podmínku barotropní instability. Nemůžeme tedy říci, že proudění mající určité vlastnosti je barotropně instabilní. Nicméně numerická řešení rovnice (16.1) pro různé profily rychlosti proudění  $U(y)$  ukazují, že výše odvozená nutná podmínka barotropní instability je v řadě případů i podmínkou postačující [43]. Tato podmínka je splněna v některých tlakových hladinách v blízkosti intertropické zóny konvergence<sup>\*)</sup> (ITCZ) a typická vlnová délka poruch o nejsilnější instabilitě nabývá zhruba 2 000 kilometrů. To dobře odpovídá vlnové délce skutečně pozorovaných synoptických

<sup>\*)</sup> Intertropická zóna konvergence je oblast nízkého tlaku v rovníkové oblasti, kde dochází k výrazné konfluenci pasátů obou polokoulí, což je doprovázeno tvorbou konvektivních oblaků a vypádním srážek. Podrobněji viz například [44].

poruch podél již zmiňované ITCZ [43]. Barotropní instabilita se tedy zdá být vhodným mechanismem rozvoje slabých poruch podél ITCZ. Jak jsme ovšem zjistili z energetického rozboru mechanismu barotropní instability v kapitole 14, další rozvoj poruch prostřednictvím mechanismu barotropní instability vyžaduje přítomnost horizontálního gradientu zonálního proudění, který zprostředkovává přeměnu kinetické energie základního zonálního proudění v kinetickou energii poruch. Ovšem poruchy synoptického měřítka v tropické oblasti mohou existovat i při absenci silnějšího horizontálního gradientu rychlosti proudění. To nás vede k tvrzení, že po možném počátečním rozvoji poruch v tropické oblasti díky barotropní instabilitě, není tento typ instability již dominantním mechanismem pro jejich další rozvoj. Barotropní instabilita však není jevem, se kterým bychom se setkali jen v tropické oblasti. Můžeme jej zaznamenat i ve středních zeměpisných šířkách, zejména v oblasti tryskového proudění.

## 16.1 Příklady možných barotropně instabilních profilů proudění

Pro ilustraci prostudujme barotropní instabilitu několika profilů rychlosti zonálního proudění. Uvažujme nejprve „kosinový“ profil definovaný vztahem [10]:

$$U = U_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2d} y\right), \quad (16.10)$$

kde  $U_0$  představuje rychlost proudění v místě  $y=y_0=0$  (viz [obrázek 16.1](#)). Nutnou podmínku instability (16.8a) je v tomto případě, po provedení patřičných derivací, možné psát následovně

$$b = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{d} y_k\right), \quad (16.11)$$

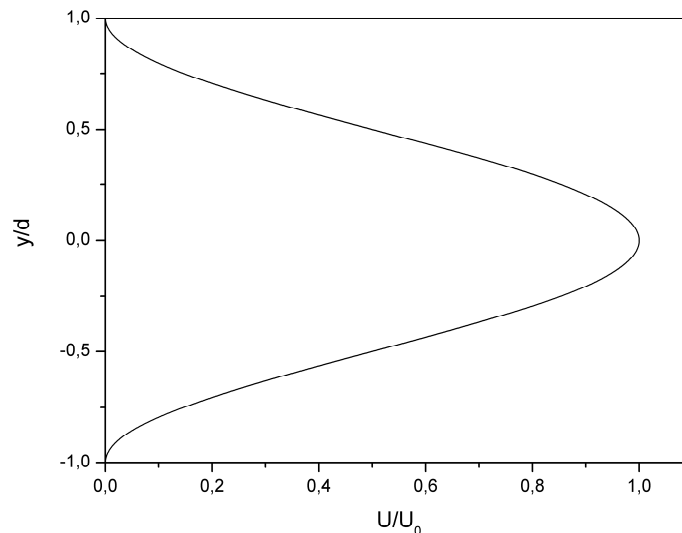
kde

$$b = \frac{\beta d^2}{\pi^2 U_0}. \quad (16.12)$$

Vzhledem k symetrii úlohy je postačující hledat  $y_k$  pouze v intervalu  $(-d, 0)$ . Je-li  $\beta=0$ , je  $y_k = -d/2$ . Při  $\beta \neq 0$  se  $y_k$  mění od  $y = -d/2$  po  $y = -d$ . Ze

vztahu (16.11) také plyne, že pro instabilitu je nutné, aby  $b < 1/2$ , což je s přihlédnutím k (16.12) ekvivalentní s požadavkem

$$U_0 > \frac{2\beta d^2}{\pi^2}. \quad (16.13)$$



Obr. 16.1 Kosinový profil rychlosti proudění daný vztahem (16.10).

Nyní zaměříme pozornost na dva profily rychlosti proudění, které jsou neohraničené, pokud jde o jejich meridionální rozsah. Nejprve formulujme nutnou podmínku instability tryskového proudění s Bickleyho profilem rychlosti [45]

$$U = U_0 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{y}{y_0} \right). \quad (16.14)$$

Západní proudění ( $U_0 > 0$ ) s takovýmto profilem můžeme najít ve vyšších hladinách atmosféry ve středních zeměpisných šířkách, nebo v případě východního proudění ( $U_0 < 0$ ) v tropických oblastech během určitého ročního období [42]. Při  $\beta = 0$  toto proudění splňuje Rayleighovu nutnou podmínku instability, protože profil rychlosti má v bodě  $y_0$  inflexní bod. V obecném případě  $\beta \neq 0$  můžeme nutnou podmínku barotropní instability (16.8a) nahradit požadavkem

$$\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_{\max} > \beta, \quad (16.15)$$

kde levá strana reprezentuje maximum druhé derivace  $U$  podle  $y$ . Položme tedy

$$\frac{d^3U}{dy^3} = 0 \quad (16.16)$$

a tuto rovnici vyřešme vzhledem k  $(d^2U/dy^2)_{\max}$ . Provedme tedy výpočty podle naznačeného postupu. Není obtížné postupně se přesvědčit, že

$$\frac{dU}{dy} = -\frac{2U_0 \operatorname{sech}^2(y/y_0) \operatorname{tgh}(y/y_0)}{y_0},$$

$$\frac{d^2U}{dy^2} = \frac{U_0}{y_0^2} \left[ -2 \operatorname{sech}^4(y/y_0) + 4 \operatorname{sech}^2(y/y_0) \operatorname{tgh}^2(y/y_0) \right],$$

$$\frac{d^3U}{dy^3} = \frac{U_0}{y_0^3} \left[ 16 \operatorname{sech}^4(y/y_0) \operatorname{tgh}(y/y_0) - 8 \operatorname{sech}^2(y/y_0) \operatorname{tgh}^3(y/y_0) \right].$$

Řešení rovnice (16.16) pak vede na následující kořeny

$$y^{(1)} = 0,$$

$$y^{(2)} = -y_0 \operatorname{arg} \operatorname{sech} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$y^{(3)} = y_0 \operatorname{arg} \operatorname{sech} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$y^{(4)} = -y_0 \operatorname{arg} \operatorname{sech} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

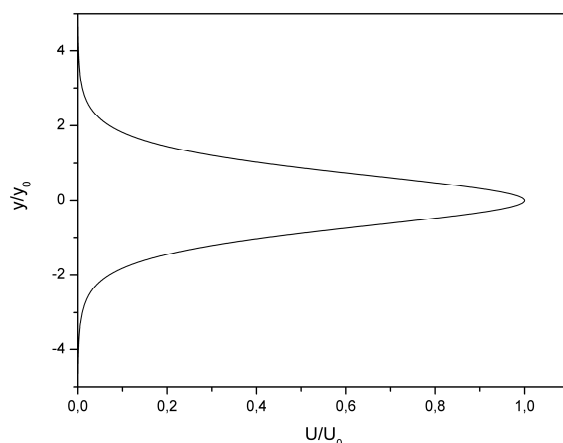
$$y^{(5)} = y_0 \operatorname{arg} \operatorname{sech} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Pro kořen  $y^{(1)}$  nabývá  $\frac{d^2U}{dy^2}$  hodnoty  $-\frac{2U_0}{y_0^2}$ , zatímco pro zbývající kořeny

$y^{(2)}$ ,  $y^{(3)}$ ,  $y^{(4)}$  a  $y^{(5)}$  je  $\frac{d^2U}{dy^2}$  rovno  $\frac{2U_0}{3y_0^2}$ . Z toho tedy plyne, že pro splnění

podmínky barotropní instability (16.15) při Bickleyho profilu proudění musí být

$$-2 < \frac{\beta y_0^2}{U_0} < \frac{2}{3}. \quad (16.17)$$



Obr. 16.2 Bickleyho profil rychlosti proudění definovaný vztahem (16.14).

Jako poslední příklad možného barotropně instabilního proudění uvedeme profil rychlosti ve tvaru

$$U = U_0 \operatorname{tgh} \left( \frac{y}{y_0} \right), \quad (16.18)$$

se kterým se můžeme setkat v oblasti intertropické zóny konvergence [42]. Analogickým způsobem, jakým jsme odvodili nutnou podmínku barotropní instability Bickleyho tryskového proudění (16.17), dospějeme k této nutné podmínce i pro profil (16.18). Postupně totiž dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dy} &= \frac{U_0 \operatorname{sech}^2(y/y_0)}{y_0}, \\ \frac{d^2U}{dy^2} &= -\frac{2U_0 \operatorname{sech}^2(y/y_0) \operatorname{tgh}(y/y_0)}{y_0}, \\ \frac{d^3U}{dy^3} &= \frac{U_0}{y_0^3} \left[ -2\operatorname{sech}^4(y/y_0) + 4\operatorname{sech}^2(y/y_0) \operatorname{tgh}^2(y/y_0) \right]. \end{aligned}$$

Řešením rovnice (16.16) pro tento případ získáme kořeny

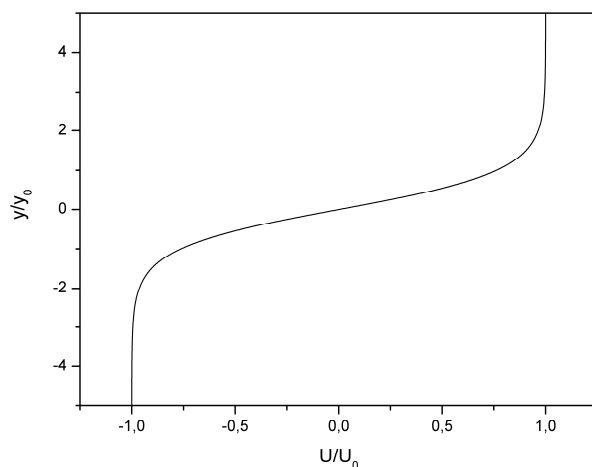
$$y^{(1)} = -y_0 \operatorname{arg} \operatorname{sech} \left( -\sqrt{\frac{2}{3}} \right),$$

$$y^{(2)} = y_0 \operatorname{arg} \operatorname{sech} \left( -\sqrt{\frac{2}{3}} \right),$$

$$y^{(3)} = -y_0 \operatorname{arg} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right),$$

$$y^{(4)} = y_0 \operatorname{arg} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right).$$

Pro kořeny  $y^{(1)}$  a  $y^{(3)}$  je  $d^2U/dy^2$  rovno  $4U_0/3\sqrt{3}y_0$  a pro kořeny  $y^{(2)}$  a  $y^{(4)}$  nabývá uvedená druhá derivace hodnoty  $-4U_0/3\sqrt{3}y_0$ . Z uvedeného a ze vztahu (16.15) vyplývá nutná podmínka barotropní instability profilu (16.18):



Obr. 16.3 Tangenciální profil rychlosti proudění daný vztahem (16.18).

$$\left| \frac{\beta y_0^2}{U_0} \right| < \frac{4}{3\sqrt{3}}. \quad (16.19)$$

## 16.2 Zobecnění Kuovy nutné podmínky barotropní instability

Kuovu nutnou podmínku barotropní instability (16.8a) lze ještě zostřit, podobně jako jsme v kapitole 10 Rayleighův teorém zpřesnili teorémem Fjørtoftovým. Předpokládejme, že  $c_i \neq 0$  a z rovnice (16.6) vyčleňme reálnou část:

$$\int_{-d}^d (U - c_r) \left( \beta - \frac{d^2 U}{dy^2} \right) \frac{|\hat{\psi}|^2}{|U - c|^2} dy = \int_{-d}^d \left( \left| \frac{d\hat{\psi}}{dy} \right|^2 + k^2 |\hat{\psi}|^2 \right) dy. \quad (16.20)$$

V případě barotropní instability musí být integrál v (16.7) nulový. Vynásobíme-li tedy rovnici (16.7) výrazem  $(c_r - U_s)$ , kde  $U_s$  je reálná konstanta, a výsledek přičteme k rovnici (16.20) vidíme, že

$$\int_{-d}^d (U - U_s) \left( \beta - \frac{d^2 U}{dy^2} \right) \frac{|\hat{\psi}|^2}{|U - c|^2} dy > 0. \quad (16.21)$$

Všimněme si, že druhá závorka v integrálu (16.21) představuje meridionální gradient absolutní vorticity základního proudění  $\bar{\eta} \equiv f - \frac{dU}{dy}$  a dále, že platnost poslední nerovnice vyžaduje, aby

$$(U - U_s) \frac{d\bar{\eta}}{dy} > 0, \quad (16.22)$$

alespoň pro nějaké  $y$  mezi  $-d$  a  $d$ . Nerovnost (16.22) musí platit pro každou reálnou konstantu  $U_s$ , tedy i pro případ, kdy  $U_s = U(y_s)$ , kde  $y_s$  je místo mezi  $-d$  a  $d$ , ve kterém je meridionální gradient absolutní vorticity základního proudění roven nule. Zostřená nutná podmínka barotropní instability tedy nabývá tvaru:

$$\begin{aligned} 1) \frac{d\bar{\eta}}{dy}(y_s) = 0 \quad \text{alespoň pro nějaké } y_s : -d < y_s < d \\ \text{a zároveň} \\ 2) (U - U_s) \frac{d\bar{\eta}}{dy} > 0 \quad \text{pro nějaké } y \in \langle -d, d \rangle, \end{aligned} \quad (16.23)$$

kde  $U_s$  je rychlost proudění v bodě, kde platí podmínka 1).



Čtenář se může oprávněně ptát, zda z rovnice (16.1) vyplývají nějaká omezení pro velikost reálné, popřípadě imaginární části fázové rychlosti  $c$ , tedy zda lze odvodit jakousi analogii Howardova polokruhového teorému (10.13). Odpověď je kladná. Po poněkud zdlouhavějších výpočtech, naznačených v [46] a podrobněji provedených Pedloskym v [10], lze ukázat, že pro fázovou rychlost instabilních poruch platí:

$$U_{\min} - \frac{2\beta d^2}{\pi^2 + 4k^2 d^2} < c_r < U_{\max}, \quad (16.24a)$$

$$\left[ c_r - \frac{1}{2}(U_{\max} + U_{\min}) \right]^2 + c_i^2 \leq \left[ \frac{1}{2}(U_{\max} - U_{\min}) \right]^2 + \frac{2\beta d^2}{\pi^2 + 4k^2 d^2}. \quad (16.24b)$$

Na rozdíl od Howardova polokruhového teorému vidíme, že nyní meze pro reálnou a imaginární část fázové rychlosti poruch závisí na jejich vlnovém čísle  $k$  a na velikosti proudové oblasti (rovné  $2d$ ). Při  $\beta = 0$  se však vztahy (16.24) logicky redukují na zmíněný Howardův polokruhový teorém.

## 17 BAROKLINNÍ INSTABILITA

V této kapitole prostudujeme baroklinní instabilitu atmosféry, která je podle současných představ moderní dynamické meteorologie hlavním mechanismem zodpovědným za vznik a vývoj poruch synoptického měřítká ve středních zeměpisných šířkách. Jde o instabilitu spojenou s vertikálním gradientem rychlosti základního (obvykle zonálního) proudění, který je prostřednictvím rovnice termálního větru svázán s meridionálním gradientem teploty. V části 14 jsme uvedli, že z energetického hlediska baroklinní instabilita představuje proces, při kterém poruchy získávají kinetickou energii na úkor dostupné potenciální energie základního stavu. Z pohledu teorie vln v atmosféře reprezentuje baroklinní instabilita určité zobecnění klasických barotropních Rossbyho vln o baroklinní efekty.

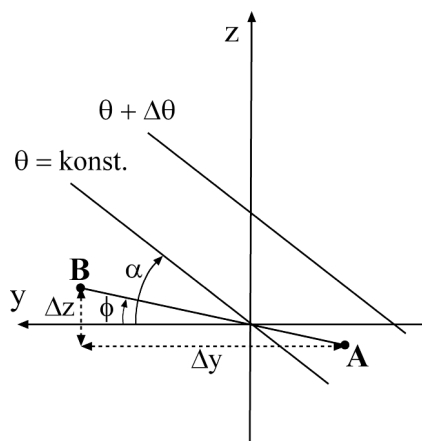
První modely baroklinní instability byly v odborné literatuře publikovány těsně po druhé světové válce Charneyem [13] a Eadyem [47]. Ačkoliv oba modely obsahovaly řadu zjednodušujících předpokladů, z nichž některé jsou dosti vzdálené poměrům ve skutečné atmosféře, dokázaly popsat některé vlastnosti synoptických útvarů poměrně dobře. Modely, které popisují baroklinní instabilitu, lze velmi přibližně rozdělit na dvě skupiny, na skupinu vertikálně spojitých modelů a na skupinu diskrétních modelů. První skupina modelů, kam patří jak Charneyho, tak Eadyho model, obvykle podrobněji popisují vertikální strukturu poruch, ovšem na úkor reálnosti zjednodušujících předpokladů, které musíme udělat, abychom mohli problém řešit pokud možno analyticky. Vertikálně diskrétní modely bývají snáze řešitelné, za což platíme daň v podobě méně podrobného popisu vertikální struktury poruch. Rozhodneme-li se ovšem řešit problematiku baroklinní instability prostředky numerické matematiky, rozdíl mezi vertikálně spojitými a diskrétními modely se přirozeně stírá.

V této knize uvádíme zástupce obou modelů. Jednak prostudujeme modifikovaný model Eadyho typu a dále pak popíšeme Holtonův [3,43]

dvojvrstevný model. Oběma modelům bude ale předcházet výklad základního mechanismu baroklinní instability prostřednictvím metody částice.

## 17.1 Základní mechanismus baroklinní instability

Podobně jako jsme vyložili princip inerční instability, lze i mechanismus baroklinní instability popsat metodou částice. Uvažujme situaci, která je schématicky zachycena na obrázku 17.1. U vzduchové částice předpokládáme vlastnosti, které byly zmíněny v poznámce pod čarou v kapitole 6. Z obrázku 17.1 je patrné, že plochy konstantní potenciální teploty  $\theta$  jsou skloněny pod úhlem  $\alpha$  vzhledem k horizontální rovině a vzduchovou částici přemístíme z polohy A do bodu B pod úhlem  $\phi$  k horizontální rovině. V bodě A necht' má vzduchová částice stejnou hustotu  $\rho_A$  a potenciální teplotu  $\theta_A$  jako okolní vzduch. Dále předpokládejme, že se vzduchová částice přemístuje adiabaticky a přizpůsobuje svůj tlak tlaku okolního vzduchu.



Obr. 17.1 K výkladu základního mechanismu baroklinní instability.

Kombinací Poissonovy rovnice

$$\theta = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} \quad (17.1)$$

a stavové rovnice

$$p = \rho RT \quad (17.2)$$

vyplývá pro hustotu, že

$$\rho = \frac{p_0}{\theta R} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}. \quad (17.3)$$

Při přesunu vzduchové částice z polohy A do polohy B se změní její hustota o

$$\Delta\rho = \frac{\rho_A}{\gamma p_A} \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_A \Delta z + \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_A \Delta y \right]. \quad (17.4)$$

Poslední vztah jsme získali logaritmičtým diferencováním (17.3) a uplatněním předpokladu, že se nemění potenciální teplota částice. Takže v nové poloze mít bude vzduchová částice hustotu

$$\rho_A + \Delta\rho = \rho_A + \frac{\rho_A}{\gamma p_A} \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_A \Delta z + \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_A \Delta y \right]. \quad (17.5)$$

Hustota okolního vzduchu v bodě B je rovna

$$\rho_A + \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_A \Delta z + \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_A \Delta y. \quad (17.6)$$

Výše jsme předpokládali, že vzdálenost poloh A a B není příliš velká, takže jsme mohli bez větší újmy na přesnost vyjádřit změnu hustoty pomocí prvních derivací v Taylorově rozvoji. Rozdíl hustoty vzduchové částice a hustoty okolního vzduchu v bodě B je

$$\begin{aligned} \Delta\rho_B &= \frac{\rho_A}{\gamma p_A} \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_A \Delta z + \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_A \Delta y \right] - \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_A \Delta z + \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_A \Delta y = \\ &= \rho_A \left\{ \left[ \frac{1}{\gamma p_A} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_A - \frac{1}{\rho_A} \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_A \right] \Delta z + \left[ \frac{1}{\gamma p_A} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_A - \frac{1}{\rho_A} \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_A \right] \Delta y \right\} = \\ &= \frac{\rho_A}{\theta_A} \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_A \Delta z + \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_A \Delta y \right]. \end{aligned} \quad (17.7)$$

Ve třetím řádku posledního vztahu jsme využili vztahu (17.3). Nyní můžeme vyjádřit sílu  $F$  působící proti (nebo ve) směru pohybu vzduchové částice

na jednotku hmoty, ve směru spojnice bodů A a B. Podle Archimédova zákona je

$$F = \frac{\Delta\rho_B}{\rho_A} g \sin\phi, \quad (17.8)$$

kde  $g$  představuje tíhové zrychlení. Je-li  $F > 0$ , bude vzduchová částice navracena zpět do své původní polohy A, při  $F < 0$  se od ní bude vzdalovat. Dosazením vztahu (17.7) do (17.8) a vynecháním indexu A máme

$$F = \frac{g}{\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} \sin\phi \left( \frac{\Delta z}{\Delta y} + \frac{\partial\theta/\partial y}{\partial\theta/\partial z} \right) \Delta y. \quad (17.9)$$

Uvážíme-li, že

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{\Delta z}{\Delta y}, \quad (17.10)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)_{\theta=\text{konst}} = - \frac{\partial\theta/\partial y}{\partial\theta/\partial z}, \quad (17.11)$$

můžeme pro sílu  $F$  psát

$$F = \frac{g}{\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} \sin\phi (\operatorname{tg}\phi - \operatorname{tg}\alpha) \Delta y. \quad (17.12)$$

Je-li atmosféra vertikálně stabilně zvrstvena, to znamená  $\partial\theta/\partial z > 0$ , tak jak je tomu na [obrázku 17.1](#), bude se vzduchová částice vzdalovat od své počáteční polohy, je-li

$$\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\phi \quad \text{a} \quad \sin\phi > 0. \quad (17.13)$$

Jinými slovy to znamená, že částice se od své původní polohy vzdaluje, leží-li její trajektorie uvnitř klínu tvořeného horizontální rovinou a plochou konstantní potenciální teploty. Tento klín bychom mohli nazvat *klínem baroklinní instability* [10]. Výše provedené úvahy byly publikovány v [10], i když jejich kořeny sahají až k původní práci Eadyho [47].

Poznámka 6: dříve jsme uváděli, že baroklinní instabilita souvisí s vertikálním gradientem rychlosti proudění. Jak se ovšem tento vztah zrcadlí v bezprostředně provedených úvahách o základním mechanismu baroklinní instability? Odpověď je nasnadě, uvědomíme-li si, že vertikální gradient rychlosti proudění má souvislost s horizontálním gradientem teploty, respektive potenciální teploty. Omezíme-li se pro jednoduchost na geostrofické proudění, má rovnice termálního větru tvar [5]

$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial z} = -\frac{g}{fT} \nabla_H T \times \mathbf{k} + \frac{\mathbf{v}_g}{T} \frac{\partial T}{\partial z},$$

ve které má druhý člen řádově menší velikost než člen první a operátor  $\nabla_H \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0 \right)$ .

Druhý člen tedy zanedbejme a dále položíme  $\frac{\partial T}{\partial x} \equiv 0$ . Potom

$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial z} = -\frac{g}{fT} \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j},$$

kde  $\mathbf{j}$  představuje jednotkový vektor orientovaný ve směru souřadnicové osy  $x$ . Z definice potenciální teploty (17.1) ovšem vyplývá, že

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{R}{c_p p} \frac{\partial p}{\partial y},$$

tedy pro vertikální gradient rychlosti geostrofického proudění máme

$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial z} = -\frac{g}{f} \left( \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{R}{c_p p} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \mathbf{j},$$

odkud je už zřejmá souvislost meridionálního gradientu potenciální teploty, který vystupuje ve vztahu (17.3) prostřednictvím  $\tan \alpha$ , a vertikálního gradientu rychlosti proudění.

Poznámka 7: všimněme si, že pokud vzduchovou částici přemístíme pouze ve vertikálním směru, to znamená, že  $\sin \phi = 1$  a  $\Delta y = 1$ , pro sílu působící na částici dostaneme ze vztahu (17.9), že

$$F = \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \Delta z,$$

a vzduchová částice je navracena zpět do své počáteční polohy, pokud je atmosféra ve stavu statické stability, to znamená  $\partial \theta / \partial z > 0$ . To dobře souhlasí s úvahami provedenými na začátku knihy v oddíle o stabilitě vnitřních gravitačních vln.

## 17.2 Baroklinní instabilita spojitého modelu na $f$ rovině

Nyní prostudujme baroklinní instabilitu pomocí modelu Eadyho typu, ovšem s některými modifikacemi oproti původní práci [47]. Hlavní změnou je, že budeme pracovat v  $p$  systému, čímž se elegantně vyhneme nutnosti zavádět poněkud nepřírozenou okrajovou podmínku na neprostupné horní hranici atmosféry, tak jako tomu bylo v původní práci [47].

Vhodnými výchozími rovnicemi, které popisují náš model, budou ty, které jsme odvodili v kapitole 15. Konkrétně vyjdeme z rovnic (15.12) a (15.16). Připomeňme, že termodynamickou rovnicí (15.16) jsme formulovali pro případ adiabatičnosti popisovaných procesů. Tento předpoklad tedy musíme převzít i nyní. Budeme dále předpokládat, že parametr statické stability atmosféry se s výškou nemění,  $\sigma \neq \sigma(p)$ , a že atmosféra je vertikálně stabilně zvrstvena. Pro parametr statické stability, který budeme dále označovat  $\bar{\sigma}$ , tak platí  $\sigma \equiv \bar{\sigma} = konst > 0$ . Necht' rychlost základního zonálního proudění  $U$  je pouze lineární funkcí vertikální souřadnice, a řešení rovnic (15.12) a (15.16) nezávisí na souřadnici  $y$  mířící od jihu k severu, tedy amplituda poruch  $\hat{\psi} \neq \hat{\psi}(y)$ . A konečně zanedbáme sférický tvar Země tím, že položíme  $\beta = 0$ , a proto Coriolisův parametr  $f$  bude konstantní a roven  $f_0$ . K zavedení uvedeného výčtu předpokladů nás vede snaha celý model zjednodušit natolik, abychom našli jeho analytické řešení, ale na druhou stranu ne tolik, aby získané řešení ztratilo podstatnou souvislost s reálnou atmosférou. Jak uvidíme později, pro stabilitu poruch má největší význam předpoklad o konstantní hodnotě Coriolisova parametru.

Díky učiněným předpokladům je meridionální gradient potenciální vorticity základního stavu (15.8) roven nule,  $\partial \bar{\Pi} / \partial y = 0$ , a rovnice potenciální vorticity (15.12) přejde na tvar

$$(U - c) \left( \frac{f_0^2}{\bar{\sigma}} \frac{d^2 \hat{\psi}}{dp^2} - k^2 \hat{\psi} \right) = 0. \quad (17.14)$$

V této rovnici, v souladu s předpoklady, položíme

$$U = S(p_0 - p), \quad S = konst > 0, \quad p_0 = 1000 \text{ hPa}. \quad (17.15)$$

Nesingulární řešení rovnice (17.14) má tvar

$$\hat{\psi} = A \cosh(ap) + B \sinh(ap), \quad (17.16a)$$

kde  $A$  a  $B$  jsou konstanty a

$$a \equiv \frac{k}{f_0} \sqrt{\bar{\sigma}}. \quad (17.16b)$$

Termodynamickou rovnicí (15.16) využijeme k zahrnutí okrajových podmínek pro zobecněnou vertikální rychlost  $\omega$ , respektive její amplitudu  $\hat{\omega}$ . Konkrétně pro  $\hat{\omega} = 0$  při  $p = p_0$  a  $p = 0$  z termodynamické rovnice (15.16) dostáváme

$$(U - c) \frac{d\hat{\psi}}{dp} - \frac{dU}{dp} \hat{\psi} = 0 \quad \text{pro } p = p_0 \text{ a } p = 0. \quad (17.17)$$

Dosazením (17.15) a (17.16) do poslední rovnice (17.17) získáme soustavu dvou homogenních algebraických rovnic

$$SA + a(Sp_0 - c)B = 0, \quad (17.18a)$$

$$[S \cosh(ap_0) - ca \sinh(ap_0)]A + [S \sinh(ap_0) - ca \cosh(ap_0)]B = 0, \quad (17.18b)$$

která má netriviální řešení právě tehdy, když determinant jejich koeficientů je roven nule:

$$\begin{vmatrix} S & a(Sp_0 - c) \\ S \cosh(ap_0) - ca \sinh(ap_0) & S \sinh(ap_0) - ca \cosh(ap_0) \end{vmatrix} = 0. \quad (17.19)$$

Výpočet tohoto determinantu vede na kvadratickou rovnici pro fázovou rychlost  $c$

$$a^2 c^2 - a^2 Sp_0 c + S^2 [ap_0 \cotgh(ap_0) - 1] = 0, \quad (17.20)$$

jejímž řešením získáme vyjádření

$$c = \frac{Sp_0}{2} \pm \frac{Sp_0}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{p_0^2 a^2} [ap_0 \cotgh(ap_0) - 1]}. \quad (17.21)$$

Poslední vzorec je možné uvést pomocí identity

$$\cotgh x = \frac{1}{2} \left( \tgh \frac{x}{2} + \cotgh \frac{x}{2} \right)$$

na přehlednější tvar

$$c = \frac{Sp_0}{2} \pm \frac{S}{a} \sqrt{\left( \frac{p_0 a}{2} - \tgh \frac{p_0 a}{2} \right) \left( \frac{p_0 a}{2} - \cotgh \frac{p_0 a}{2} \right)}. \quad (17.22)$$

Protože pro všechna uvažovaná  $a$  je  $\frac{p_0 a}{2} > \tgh \frac{p_0 a}{2}$ , je výraz pod odmocninou v (17.22) kladný, je-li splněna nerovnost  $\frac{p_0 a}{2} > \cotgh \frac{p_0 a}{2}$ . V takovém případě by byla fázová rychlost  $c$  reálná a poruchy v našem modelu by



nebyly instabilní. Našemu zájmu se však bude zejména těšit případ právě opačný. Výraz pod odmocninou ve vztahu (17.22) je roven nule, je-li

$$\frac{p_0 a}{2} = \operatorname{cotgh} \frac{p_0 a}{2}, \quad (17.23a)$$

což je splněno pro

$$\frac{p_0 a}{2} = 1,1997. \quad (17.23b)$$

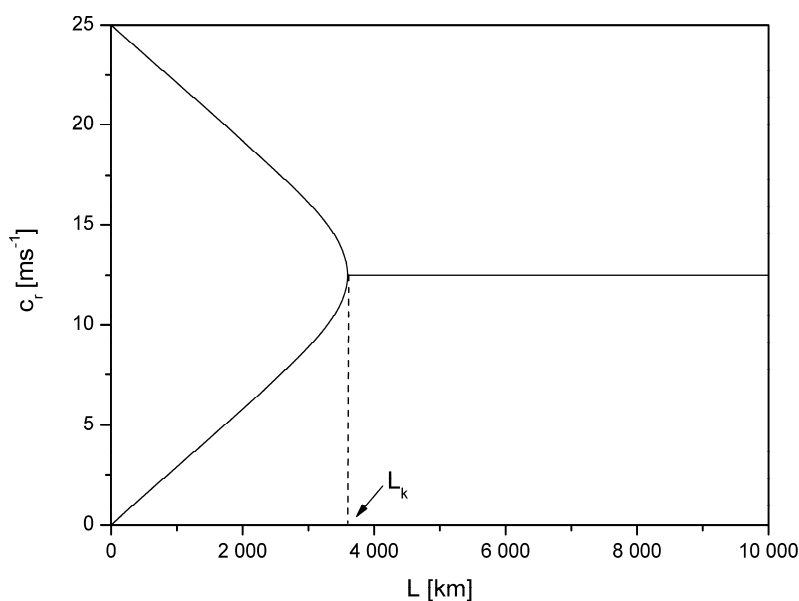
Tento výsledek byl získán numerickým výpočtem. Dosazením (17.16b) do (17.23b) a použitím vztahu mezi vlnovým číslem  $k$  a vlnovou délkou  $L$ ,  $k = 2\pi/L$ , obdržíme výraz pro kritickou vlnovou délku

$$L_k = \frac{\pi \sqrt{\bar{\sigma}} p_0}{1,1997 f_0} \doteq 2,542 \cdot 10^9 \sqrt{\bar{\sigma}} \quad [m], \quad (17.24)$$

kde jsme položili  $p_0 = 10^5$  Pa a  $f_0 = 1,03 \cdot 10^{-4}$  s<sup>-1</sup>. Interpretace kritické vlnové délky  $L_k$  je evidentní z toho, jak jsme získali vztah pro její výpočet. Pro všechny poruchy s vlnovou délkou kratší než  $L_k$ ,  $L < L_k$ , je výraz pod odmocninou v (17.22) kladný a fázová rychlost  $c$  je reálné číslo – dostáváme tak dvě poruchy s časově neproměnnou amplitudou. Naopak je-li  $L > L_k$ , je výraz pod odmocninou v (17.22) záporný, a tedy fázová rychlost  $c$  má nenulovou imaginární část – máme tak dvě poruchy s proměnnou amplitudou, z nichž jedna se s rostoucím časem zvětšuje a druhá zmenšuje (viz vztah 3.3). Položíme-li  $\bar{\sigma} = 2 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>s<sup>-2</sup>Pa<sup>-2</sup>, vychází  $L_k \doteq 3\,595$  km. Zvolená hodnota  $\bar{\sigma}$  je střední hodnota parametru statické stability mezi hladinami 1 000 a 350 hPa při poklesu teploty 0,65 K na 100 m a teplotě 288 K v hladině 1 000 hPa. Bližší podrobnosti k této volbě hodnoty parametru statické stability atmosféry uvádíme v poznámce 8. Ze vztahu (17.24) vyplývá zajímavé zjištění, že pro pevně zadanou zeměpisnou šířku  $\varphi_0$  ( $f_0 = 2\Omega \sin \varphi_0$ ) závisí velikost kritické vlnové délky právě pouze na stabilitě vertikálního zvrstvení atmosféry, a to tak, že se vzrůstající stabilitou vertikálního zvrstvení se hodnota  $L_k$  posouvá k delším vlnovým délkám. Při pevně zadané hodnotě  $\bar{\sigma}$  a se vzrůstající vzdáleností od rovníku ( $f_0$  také roste) se  $L_k$  zkracuje.

Translační rychlost poruch (je rovna reálné části fázové rychlosti  $c$ ) je znázorněna na [obrázku 17.2](#). Pro jeho získání jsme položili  $S = 2,5 \cdot 10^{-4}$  ms<sup>-1</sup>Pa<sup>-1</sup> a  $\bar{\sigma}$  jsme zvolili stejně jako v předchozím odstavci. Stejných hodnot obou parametrů používáme i v dalším textu, není-li výslovně uvedeno jinak.

Z obrázku 17.2 vidíme, že obě poruchy se s neproměnnou amplitudou pohybují různými rychlostmi, které se vzájemně sblíží, blíží-li se vlnová délka obou poruch ke kritické vlnové délce  $L_k$ . Poruchy s proměnnou amplitudou se pak pohybují stejnou rychlostí, která závisí na vertikálním gradientu rychlosti proudění  $S$  a je rovna  $c_r = Sp_0/2$ . S přihlédnutím ke vztahům (17.15) zjistíme, že je to také rychlost základního proudění  $U_{500}$  v hladině 500 hPa. Tato hladina je tedy kritickou (nebo také řídicí) hladinou našeho modelu, tak jak jsme tuto hladinu definovali v kapitole 10.



Obr. 17.2 Závislost translační rychlosti poruch na vlnové délce.

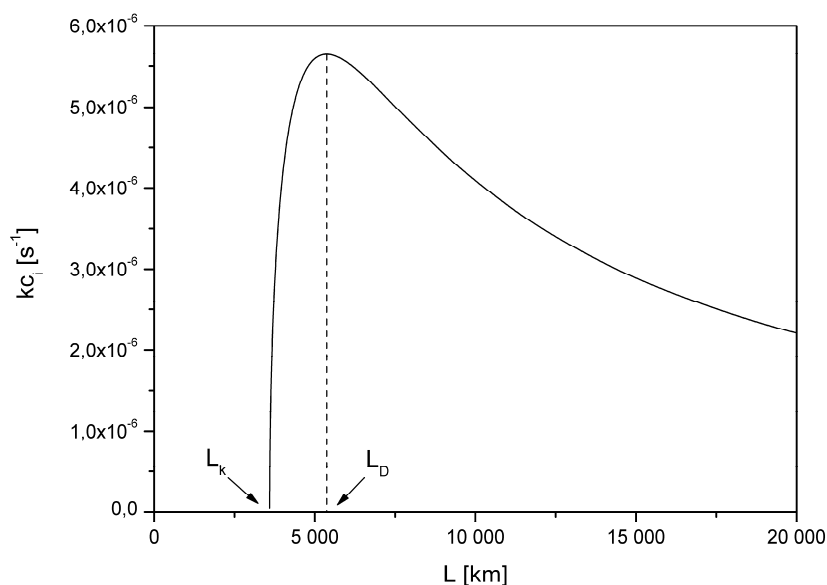
Ze vztahu (17.22) také určíme rychlost růstu (růstový faktor)  $kc_i$  instabilních zesilujících poruch

$$kc_i = \frac{kS}{a} \sqrt{\left(\frac{p_0 a}{2} - \operatorname{tgh} \frac{p_0 a}{2}\right) \left(\operatorname{cotgh} \frac{p_0 a}{2} - \frac{p_0 a}{2}\right)}. \quad (17.25)$$

Stejně hodnoty, ovšem s opačným znaménkem, dosahuje  $kc_i$  perturbací, jejichž amplituda se s časem zmenšuje; v takovém případě bychom mohli mluvit spíše o útlumovém faktoru místo o růstovém faktoru. Průběh  $kc_i$  v závislosti na vlnové délce je zachycen na obrázku 17.3. Je z něho dobře patrná poloha kritické vlnové délky  $L_k$  a také to, že krátké vlnové poruchy

jsou stabilní, zatímco pro  $L > L_k$  existují perturbace se zvětšující se amplitudou.

Všimněme si, že existuje vlnová délka, označená jako  $L_D$ , pro kterou nabývá růstový faktor maximum. To znamená, že existuje porucha, která v rámci našeho lineárního přístupu roste nejrychleji a v poli poruch tak začne po určitém čase dominovat. Této poruše s vlnovou délkou  $L_D$  proto bude-



Obr. 17.3 Závislost růstového faktoru  $kc_i$  na vlnové délce.

me říkat *dominantní porucha*. Vypočtíme hodnotu  $L_D$ . Za tímto účelem musíme řešit rovnici

$$\frac{d}{dk}(kc_i) = 0, \quad (17.26)$$

která po dosazení pomocí (17.25) a provedení derivace vede na rovnici

$$\cotgh \frac{p_0 a}{2} - \frac{p_0 a}{2 \sinh^2 \frac{p_0 a}{2}} + \tgh \frac{p_0 a}{2} + \frac{p_0 a}{2 \cosh^2 \frac{p_0 a}{2}} - p_0 a = 0. \quad (17.27)$$

Numerické řešení poslední rovnice dává

$$\frac{p_0 a}{2} = 0,8031, \quad (17.28)$$

odkud po dosazení z (17.16b) a použitím  $k = 2\pi/L$  obdržíme pro vlnovou délku dominantní poruchy vyjádření

$$L_D = \frac{\pi\sqrt{\bar{\sigma}}p_0}{0,8031f_0} \doteq 3,798 \cdot 10^9 \sqrt{\bar{\sigma}} \quad [\text{m}], \quad (17.29)$$

kde jsme při vyčíslení přibližného vztahu použili stejných hodnot  $p_0$  a  $f_0$  jako při výpočtu kritické vlnové délky  $L_k$ . Porovnání vztahů (17.29) a (17.24) ukazuje, že vlnová délka dominantní poruchy má podobné vlastnosti jako  $L_k$ , to znamená, že se zvětšuje s rostoucí stabilitou vertikálního zvrstvení atmosféry a klesá se zvětšující se vzdáleností od rovníku. Koneckonců, jak vyplývá ze vzorců pro  $L_D$  a  $L_k$ , jsou obě vlnové délky propojeny jednoznačným vztahem  $L_D \doteq 1,49384L_k$ . Zvolíme-li opět  $\bar{\sigma} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ Pa}^{-2}$ , vychází  $L_D \doteq 5\,300 \text{ km}$ . Jak už bylo řečeno dříve, perturbace s touto vlnovou délkou bude podle zvoleného lineárního přístupu ve spektru sílicích poruch po uplynutí určitého času dominovat. Uvědomíme-li si, že čtvrtina vlnové délky poruchy odpovídá vzdálenosti hřebene vysokého tlaku od brázdy nízkého tlaku, vychází  $L_D/4 \approx 1\,000 \text{ km}$ . To velmi dobře souhlasí s charakteristickou velikostí synoptických poruch ve středních zeměpisných šířkách. Náš model baroklinní instability tedy poměrně dobře vystihuje vznik těchto synoptických poruch, a to i v rámci lineárního přiblížení a s celou řadou zjednodušujících předpokladů učiněných, na počátku výkladu.

V další části textu zaměříme pozornost na určení struktury instabilních (sílicích) poruch, zejména pak dominantní poruchy. Z rovnice (17.8a) vyjádříme konstantu  $B$  a dosazením do (17.16a) získáme výraz pro amplitudy poruchové proudové funkce

$$\hat{\psi} = A \cosh(ap) - \frac{AS}{a(Sp_0 - c)} \sinh(ap). \quad (17.30a)$$

Konstantu  $A$  však nejsme schopni určit v rámci lineární teorie, a proto ji v dalším textu položíme rovnu jedné. Mějme na paměti, že získané amplitudy je možné vynásobit reálnou nenulovou konstantou, tedy místo posledního vztahu budeme psát

$$\hat{\psi} = \cosh(ap) - \frac{S}{a(Sp_0 - c)} \sinh(ap). \quad (17.30b)$$

Proudovou funkci perturbací můžeme díky (15.11) vyjádřit jako

$$\psi' = \left[ \cosh(ap) - \frac{S}{a(Sp_0 - c)} \sinh(ap) \right] e^{ik(x-ct)}. \quad (17.31a)$$

Protože jsme při odvození rovnice potenciální vorticity (15.12), která se stala východiskem pro právě prováděné úvahy, uvažovali zjednodušený vztah mezi geopotenciálem a proudovou funkcí  $\phi=f_0\psi$ , představují vztahy (17.30) zároveň i vztahy pro amplitudu, případně perturbace v poli geopotenciálu, a to až na multiplikátor  $f_0$ :

$$\hat{\phi} = f_0 \left[ \cosh(ap) - \frac{S}{a(Sp_0 - c)} \sinh(ap) \right], \quad (17.30c)$$

$$\phi' = f_0 \left[ \cosh(ap) - \frac{S}{a(Sp_0 - c)} \sinh(ap) \right] e^{ik(x-ct)}. \quad (17.31b)$$

Rozložíme-li fázovou rychlost instabilních poruch na reálnou a imaginární část

$$c = c_r + ic_i = \frac{Sp_0}{2} + ic_i \quad (17.32)$$

a dosadíme-li tento rozklad do (17.30c), získáme

$$\hat{\phi} = f_0 \left[ \cosh(ap) - \frac{S}{a\left(\frac{Sp_0}{2} - ic_i\right)} \sinh(ap) \right]. \quad (17.33)$$

Druhý člen v hranaté závorce posledního výrazu upravíme následovně:

$$\frac{1}{\left(\frac{Sp_0}{2} - ic_i\right)\left(\frac{Sp_0}{2} + ic_i\right)} = \frac{Sp_0}{2\left(\frac{S^2 p_0^2}{4} + c_i^2\right)} + i \frac{c_i}{\left(\frac{S^2 p_0^2}{4} + c_i^2\right)}.$$

Pro amplitudu perturbací geopotenciálu tak máme

$$\hat{\phi} = f_0 \left[ \cosh(ap) - \frac{S^2 p_0}{2a\left(\frac{S^2 p_0^2}{4} + c_i^2\right)} \sinh(ap) - i \frac{Sc_i}{a\left(\frac{S^2 p_0^2}{4} + c_i^2\right)} \sinh(ap) \right] \quad (17.34)$$

a při volbě  $\hat{\phi} = |\hat{\phi}| e^{i\alpha_\phi}$ , kde  $\alpha_\phi$  je fázový úhel, můžeme psát

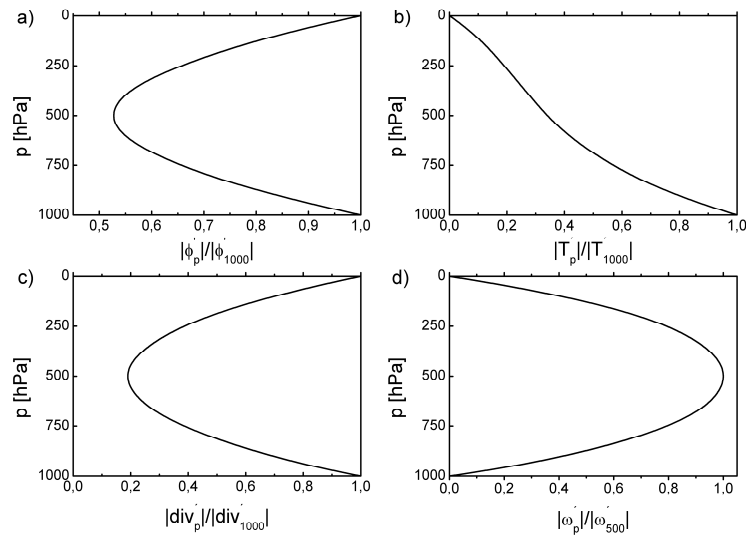
$$\phi' = e^{kc_r t} |\hat{\phi}| e^{i(kx + \alpha_\phi - kc_r t)}, \quad (17.35)$$

kde  $c_r = Sp_0/2$  a dále

$$|\hat{\phi}| = f_0 \sqrt{\left[ \cosh(ap) - \frac{S^2 p_0 \sinh(ap)}{2a \left( \frac{S^2 p_0^2}{4} + c_i^2 \right)} \right]^2 + \left[ \frac{Sc_i \sinh(ap)}{a \left( \frac{S^2 p_0^2}{4} + c_i^2 \right)} \right]^2}, \quad (17.36)$$

$$\text{tg} \alpha_\phi = \frac{-2Sc_i \sinh(ap)}{2a \left( \frac{S^2 p_0^2}{4} + c_i^2 \right) \cosh(ap) - S^2 p_0 \sinh(ap)}. \quad (17.37)$$

Opět připomínáme, že fyzikální význam má pouze reálná část vztahu (17.35). Vertikální průběh absolutní hodnoty amplitudy  $|\hat{\phi}|$  perturbací v poli geopotenciálu pro dominantní poruchu je znázorněn na [obrázku 17.4a](#). Vidíme, že maximálních hodnot dosahuje amplituda u zemského povrchu a u horní hranice atmosféry, naopak je minimální v hladině 500 hPa. Ze

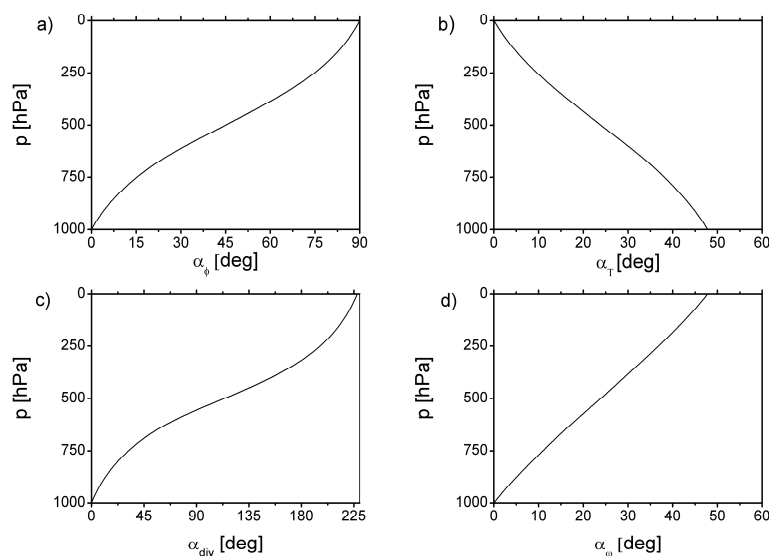


Obr. 17.4 Vertikální průběh amplitudy dominantní poruchy v poli geopotenciálu a), teploty b), izobarické divergence c) a zobecněné vertikální rychlosti d).

vztahu (17.37) je patrné, že pro instabilní poruchu se fázový úhel mění s vertikální souřadnicí – pro sílicí poruchu se s výškou zvětšuje, což znamená, že se sílicí porucha v poli geopotenciálu s rostoucí výškou naklání směrem k západu, tedy proti směru základního proudění  $U$  směřujícího na východ (viz vztahy (17.15)). Vyjádřeno jinými slovy to znamená, že sílicí porucha v poli geopotenciálu u zemského povrchu předbíhá poruchu ve vyšších hladinách atmosféry. Tento předstih závisí na vlnové délce  $L > L_k$ . Podrobnějším výpočtem, viz [48], lze ukázat, že pro sílicí vlnou poruchu o vlnové délce 4000 km tento předstih mezi hladinami 1000 a 500 hPa mírně převyšuje  $20^\circ$ , zatímco pro poruchu o vlnové délce 7000 km činí více než  $50^\circ$ . Izočary konstantní fáze splňují v každém okamžiku vztah

$$kx = -\alpha_\phi(p) + konst. \quad (17.38)$$

Průběh fázového úhlu  $\alpha_\phi$  s vertikální souřadnicí pro dominantní poruchu je uveden na obrázku 17.5a. Ze vztahu (17.37) je také patrné, že slábnoucí poruchy se v poli geopotenciálu s rostoucí výškou naklání směrem na východ, tedy opačným směrem než poruchy sílicí.



Obr. 17.5 Vertikální průběh fázového úhlu v poli geopotenciálu a), teploty b), izobarické divergence c) a zobecněné vertikální rychlosti d) dominantní poruchy.

Perturbace v teplotním poli určíme prostřednictvím rovnice hydrostatické rovnováhy

$$\frac{\partial \phi'}{\partial p} = -\alpha' = -\frac{RT'}{p}, \quad (17.39)$$

tedy

$$T' = -\frac{p}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial p}. \quad (17.40)$$

Dosazením (17.31b) do posledního vztahu a využitím  $e^{i\pi} = -1$  můžeme pro  $T'$  psát

$$T' = \frac{f_0 p}{R} \left[ a \sinh(ap) - \frac{S}{Sp_0 - c} \cosh(ap) \right] e^{i(kx + \pi - kct)}. \quad (17.41)$$

Odtud s přihlédnutím k (17.31b) vyplývá, že poruchy s časově neproměnnou amplitudou jsou v poli geopotenciálu a teploty vzájemně posunuty o  $180^\circ$ . Budeme-li se věnovat sílicím poruchám a fázovou rychlost  $c$  rozepíšeme pomocí (13.32), dostaneme pro perturbace v teplotním poli

$$T' = \frac{f_0 p}{R} \left[ \frac{S^2 p_0}{2 \left( \frac{S^2 p_0^2}{4} + c_i^2 \right)} \cosh(ap) - a \sinh(ap) + \right. \\ \left. + i \frac{Sc_i}{\left( \frac{S^2 p_0^2}{4} + c_i^2 \right)} \cosh(ap) \right] e^{ik(x-ct)} \quad (17.42)$$

Použitím obdobného postupu jako při vyjádření  $\phi'$  získáme

$$T' = e^{kc_i t} |\hat{T}| e^{i(kx + \alpha_T - kc_i t)}, \quad (17.43)$$

kde

$$|\hat{T}| = \frac{f_0 p}{R} \sqrt{\left[ \frac{S^2 p_0 \cosh(ap)}{2 \left( \frac{S^2 p_0^2}{4} + c_i^2 \right)} - a \sinh(ap) \right]^2 + \left[ \frac{Sc_i \cosh(ap)}{\left( \frac{S^2 p_0^2}{4} + c_i^2 \right)} \right]^2} \quad (17.44)$$



a platí

$$\operatorname{tg} \alpha_T = \frac{2Sc_i \cosh(ap)}{S^2 p_0 \cosh(ap) - 2a \sinh(ap) \left( \frac{S^2 p_0^2}{4} + c_i^2 \right)}. \quad (17.45)$$

Vzhledem k poklesu tlaku a hustoty vzduchu s výškou vyplývá ze vztahu (17.44) očekávaná skutečnost, že amplituda  $|\hat{T}|$  s výškou klesá – viz [obrázek 17.4b](#). Poruchy v poli teploty jsou tedy nejvýrazněji vyjádřeny u zemského povrchu. Pokud jde o fázový úhel  $\alpha_T$ , pro zvětšující se poruchy se tento úhel s rostoucí výškou zmenšuje a izočáry konstantní fáze v poli teplotních perturbací se sklání směrem k východu, tedy v opačném směru než u geopotenciálu. Vertikální průběh  $\alpha_T$  pro dominantní poruchu je znázorněn na [obrázku 17.5b](#).

Perturbace v poli divergence v  $p$  systému,  $\nabla_p \cdot \mathbf{v}'$ , určíme pomocí rovnice vorticity (15.1), která pro poruchy za uvedených předpokladů přechází na tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + U \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} = f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}. \quad (17.46)$$

Pro rovnici kontinuity dostáváme

$$\nabla_p \cdot \mathbf{v}' + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (17.47)$$

Kombinací posledních dvou rovnic s přihlédnutím k (15.11) po úpravě získáme

$$\nabla_p \cdot \mathbf{v}' = \frac{ik^3}{f_0} (U - c) \hat{\psi}(p) e^{ik(x-ct)}. \quad (17.48)$$

Použitím (17.32) a analogickými úpravami jako při odvození vztahů (17.35) a (17.43) po zdlouhavých výpočtech dospějeme k vyjádření

$$\nabla_p \cdot \mathbf{v}' = e^{kc_i t} \left| \hat{D} \right| e^{i(kx + \alpha_D - kc_i t)}, \quad (17.49)$$

kde

$$\left| \hat{D} \right| = \frac{1}{f_0} \left\{ \left[ k^3 S \left( \frac{p_0}{2} - p \right) D_1 \sinh(ap) + k^3 c_i (\cosh(ap) - D_2 \sinh(ap)) \right]^2 + \left[ k^3 S \left( \frac{p_0}{2} - p \right) (\cosh(ap) - D_2 \sinh(ap)) - k^3 c_i D_1 \sinh(ap) \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (17.50)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_D = \frac{S \left( \frac{p_0}{2} - p \right) [\cosh(ap) - D_2 \sinh(ap)] - c_i D_1 \sinh(ap)}{S \left( \frac{p_0}{2} - p \right) D_1 \sinh(ap) + c_i [\cosh(ap) - D_2 \sinh(ap)]}, \quad (17.51)$$

$$D_1 = \frac{S c_i}{a \left( \frac{S^2 p_0^2}{4} + c_i^2 \right)}, \quad D_2 = \frac{S^2 p_0}{2a \left( \frac{S^2 p_0^2}{4} + c_i^2 \right)}. \quad (17.52)$$

Vertikální průběh amplitudy  $|\hat{D}|$  pro dominantní poruchu je znázorněn na [obrázku 17.4c](#). Z něho je zřejmé, že minimální, ne však nulovou, divergenci zaznamenáváme v hladině 500 hPa. To poměrně dobře souhlasí s poměry ve skutečné atmosféře. Závislost fázového úhlu  $\alpha_D$  na vertikální souřadnici pro uvedenou poruchu je zachycena na [obrázku 17.5c](#). Izočáry konstantní fáze se s výškou kloní k západu, mají tedy stejný směr, jako tomu bylo u perturbací v poli geopotenciálu s tím rozdílem, že  $\alpha_D$  nabývá většího rozsahu než  $\alpha_\phi$ . Sklon poruch v poli divergence  $\nabla_p \cdot \mathbf{v}'$  je tedy větší než v poli geopotenciálu  $\phi'$  (ostatně je také větší než pro perturbace v poli teploty a zobecněné vertikální rychlosti  $\omega$ , jak vzápětí uvidíme).

Popišme nyní v našem modelu strukturu vertikálních rychlostí. Dosadíme-li do rovnice (15.15) za  $\hat{\omega}$  pomocí termodynamické rovnice (15.16), v níž vyjádříme  $\partial U / \partial p = -S$ , můžeme zobecněnou vertikální rychlost uvádět ve tvaru

$$\omega = -\frac{ikf_0}{\bar{\sigma}} \left[ (U - c) \frac{d\hat{\psi}}{dp} + S\hat{\psi} \right] e^{ik(x-ct)}. \quad (17.53)$$

S využitím vztahu pro perturbační proudovou funkci (17.30b), vyjádřením (17.15) a provedením obdobných úprav jako při odvození (17.35), (17.43) nebo (17.49), po únavných úpravách dospějeme k následujícímu vyjádření zobecněné vertikální rychlosti

$$\omega = e^{kc,t} |\hat{\omega}| e^{i(kx + \alpha_\omega - kc,t)}, \quad (17.54)$$

kde

$$|\hat{\omega}| = \frac{f_0 k}{\bar{\sigma}} \left\{ \left[ ac_i (D_2 \cosh(ap) - \sinh(ap)) - aSD_1 \left( \frac{p_0}{2} - p \right) \cosh(ap) - \right. \right. \\ \left. \left. - SD_1 \sinh(ap) \right]^2 + \left[ aS \left( \frac{p_0}{2} - p \right) (D_2 \cosh(ap) - \sinh(ap)) - \right. \right. \\ \left. \left. - aD_1 c_i \cosh(ap) + S (D_2 \sinh(ap) - \cosh(ap)) \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (17.55)$$

$$\text{tg} \alpha_\omega = \\ = \frac{aS \left( \frac{p_0}{2} - p \right) [D_2 \cosh(ap) - \sinh(ap)] - aD_1 c_i \cosh(ap) + S [D_2 \sinh(ap) - \cosh(ap)]}{ac_i [D_2 \cosh(ap) - \sinh(ap)] - aSD_1 \left( \frac{p_0}{2} - p \right) \cosh(ap) - SD_1 \sinh(ap)} \quad (17.56)$$

Parametry  $D_1$  a  $D_2$  jsou dány vztahy (17.52). Vertikální průběh amplitudy  $|\hat{\omega}|$  pro dominantní poruchu je znázorněn na [obrázku 17.4d](#). Z něho je patrné, že nejintenzivnější vertikální pohyby registrujeme v hladině 500 hPa, na což jsme koneckonců mohli usuzovat již ze znalosti rozložení pole divergence  $\nabla_p \cdot \mathbf{V}'$ . Vertikální průběh fázového úhlu  $\alpha_\omega$  pro dominantní poruchu je opět vidět na [obrázku 17.5d](#), ze kterého vyplývá, že se s rostoucí výškou zvětšuje, tedy izočáry konstantní fáze v poli zobecněné vertikální rychlosti se sklání směrem k západu, tedy proti směru základního zonálního proudění. Docházíme ke stejné situaci, jakou jsme zaznamenali i u perturbací v poli geopotenciálu a divergence.

Názorný pohled na vzájemné uspořádání jednotlivých polí geopotenciálu, teploty, izobarické divergence a zobecněné vertikální rychlosti perturbací, pro které jsme výše odvodili analytické vztahy, poskytuje informace o poloze extrémů těchto polí v každé tlakové hladině. Extrémy v poli geopotenciálu a teploty určíme pomocí následujících podmínek

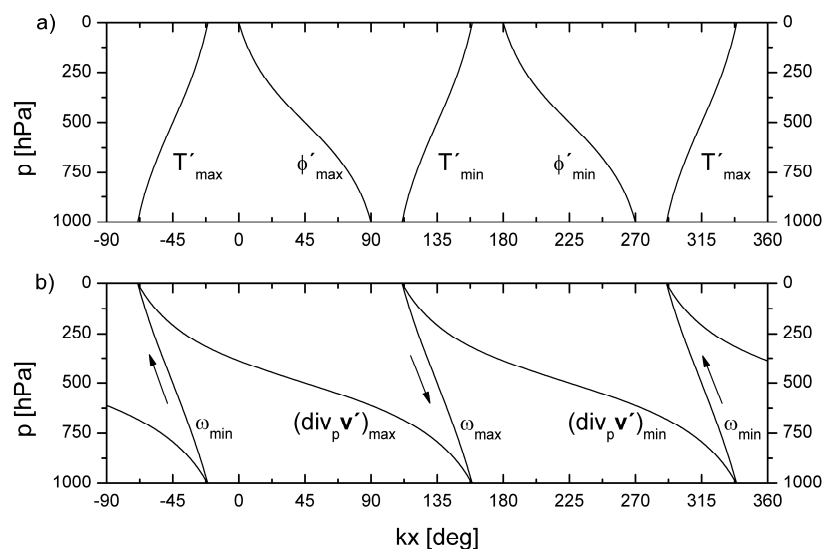
maxima:

$$\begin{aligned} kx + \alpha_\phi &= 0 + 2\pi n, \\ kx + \alpha_T &= 0 + 2\pi n, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (17.57a)$$

minima:

$$\begin{aligned}
 kx + \alpha_\phi &= \pi + 2\pi n, \\
 kx + \alpha_T &= \pi + 2\pi n, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots
 \end{aligned}
 \tag{17.57b}$$

Uspořádání těchto extrémů je pro dominantní poruchu znázorněno na [obrázku 17.6a](#). Uvědomme si, že  $\phi'_{\max}$  představuje osu hřebene vysokého tlaku (popřípadě anticyklony) a že  $\phi'_{\min}$  odpovídá ose brázdy nízkého tlaku (popřípadě cyklony). Je tedy patrné, že přízemní oblast nízkého tlaku představuje teplý útvar s nejteplejší zónou v její přední části, zatímco oblast vysokého tlaku při zemském povrchu je útvar chladný s nejchladnějším vzduchem opět před jeho přízemní osou. S rostoucí výškou se teplý vzduch přimyká k hřebenu vysokého tlaku a chladný vzduch k brázdě nízkého tlaku, výšková brázda je tedy chladným, zatímco výškový hřeben teplým útvarem. Z uvedených skutečností i z [obrázku 17.6a](#) je tedy zřejmé, že pole perturbací geopotenciálu a teploty nejsou ve fázi, naopak geopotenciální vlna předstihuje teplotní vlnu. V kritické (řídící) hladině 500 hPa tento předstih činí  $90^\circ$ , tedy  $1/4$  vlnové délky.



Obr. 17.6 Poloha maxim a minim dominantní poruchy v poli geopotenciálu, teploty a) izobarické divergence a zobecněné vertikální rychlosti b).

Podobným způsobem určíme i průběh extrémů v poli izobarické divergence  $\nabla_p \cdot \mathbf{v}'$  a vertikálních pohybů  $\omega$ :

maxima:

$$\begin{aligned} kx + \alpha_D &= 0 + 2\pi n, \\ kx + \alpha_\omega &= 0 + 2\pi n, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (17.57c)$$

minima:

$$\begin{aligned} kx + \alpha_D &= \pi + 2\pi n, \\ kx + \alpha_\omega &= \pi + 2\pi n, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (17.57d)$$

Konfigurace těchto extrémů je znázorněna na [obrázku 17.6b](#). Vidíme, že u zemského povrchu je oblast minimální izobarické divergence, tedy vlastně maximální konvergence  $\nabla_p \cdot \mathbf{v}' < 0$ , doprovázena maximálními výstupnými pohyby vzduchu  $\omega_{\min}$ , zatímco v oblasti horní hranice atmosféry je tomu naopak – tedy oblast maximální izobarické konvergence rychlosti proudění odpovídá maximu sestupných pohybů u horní hranice atmosféry. Analogicky, maximum izobarické divergence u zemského povrchu je spojeno s maximem sestupných pohybů vzduchu, u horní hranice atmosféry je situace opět opačná, kdy maximum izobarické divergence rychlosti proudění souhlasí s oblastí maximálních výstupných pohybů vzduchu. Porovnáním [obrázků 17.6a](#) a [17.6b](#) zjišťujeme, že v přízemní oblasti nízkého tlaku dominuje izobarická konvergence proudění spolu s výstupnými pohyby vzduchu. Povšimněme si dále, že nejintenzivnější výstupné pohyby vzduchu jsou situovány do hladiny 500 hPa (viz [obrázek 17.4d](#)) a v této hladině předstihuje maximum výstupných pohybů přízemní osu oblasti nízkého tlaku o  $45^\circ$ , což odpovídá  $1/8$  vlnové délky poruchy. Kdybychom tedy uvažovali možnost kondenzace vodní páry a vypadávání srážek, podle našeho modelu bychom mohli očekávat polohu nejintenzivnějších srážek právě ve vzdálenosti  $L_D/8$  před přízemní osou tlakové brázd, což pro dominantní poruchy odpovídá vzdálenosti přibližně 660 km. Pro úplnost výkladu dodejme, že v přízemní oblasti vysokého tlaku převládá izobarická divergence proudění a sestupné pohyby vzduchu.

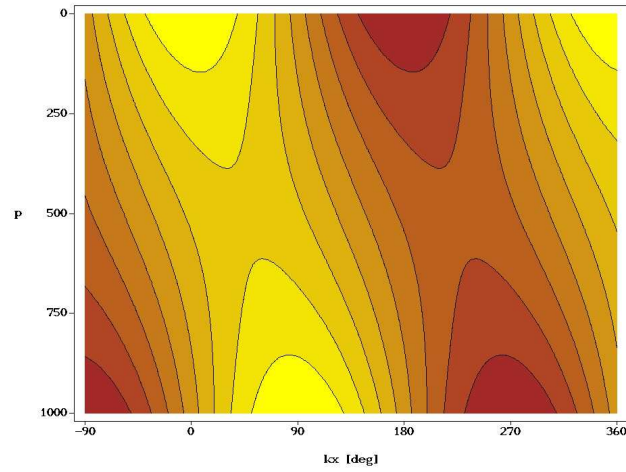
Komplexní pohled na strukturu nejrychleji sílící poruchy poskytují [obrázky 17.7, 17.8, 17.9 a 17.10](#), na kterých jsou postupně pro jednu a čtvrt vlnové délky  $L_D$  nakresleny perturbace v poli geopotenciálu ([obr. 17.7](#)), teploty ([obr. 17.8](#)), izobarické divergence ([obr. 17.9](#)) a zobecněné vertikální rychlosti ([obr. 17.10](#)). Všechny čtyři obrázky v podstatě potvrzují dříve uvedené výsledky. Na tomto místě je ovšem nutno zdůraznit, že námi získaný

obrázek 17.8 pro teplotní perturbace se liší od izochar teplotních perturbací publikovaných Holtonem [3] (obr. 8.10 str. 259), který se také zabýval rozбором modelu Eadyho typu. Holtonovy teplotní perturbace mají amplitudu stejnou na spodní i horní hranici modelu. Holton se však více přidržel původní Eadyho práce [47] v tom smyslu, že model omezil ve vertikálním směru dvěma neprostupnými hranicemi ve výškách  $z = 0$  a  $z = H < \infty$  a pracoval s výškou  $z$  jako s vertikální souřadnicí. Podle našeho soudu námi představená modifikace Eadyho modelu a použití  $p$  systému lépe odpovídá poměrům ve skutečné atmosféře.

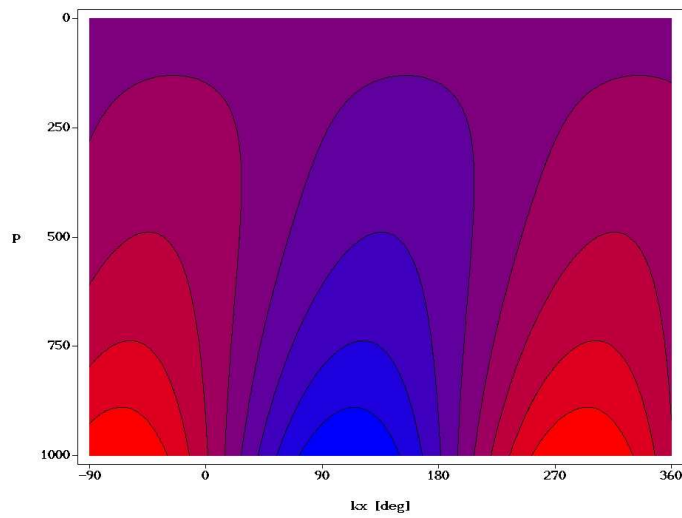
Viděli jsme, že ačkoliv jsme použili relativně jednoduchý model, byli jsme schopni popsat některé vlastnosti skutečných poruch synoptického měřítka ve středních zeměpisných šířkách, pochopitelně v ranných stádiích jejich vývoje vzhledem k tomu, že jsme řídicí rovnice linearizovali. Máme na mysli zejména velikost (vlnovou délku) dominantní poruchy a její vertikální strukturu. Poměrně dobře jsme rovněž identifikovali hladinu minimální divergence v oblasti 500 hPa, stejně tak i polohu řídicí hladiny. Jednoznačnou nevýhodou tohoto modelu Eadyho typu je použití  $f$  roviny, tedy zanedbání sférickosti Země. To se projevuje zejména v instabilitě velmi dlouhých vln. V další části knihy uvidíme, že už zahrnutí kulatosti Země prostřednictvím  $\beta$  rovinné aproximace stabilizuje velmi dlouhé vlny.

Od publikování původní práce [47] byl Eadyho model podroben řadě analýz se zahrnutím řady realističtějších prvků. Například zahrnutí neadiabatického členu do termodynamické rovnice, který popisuje příkon tepla od spodní hranice, představované kupříkladu teplejším oceánem, má za následek objevení se sekundárního maxima růstového faktoru  $kc_i$  v oblasti velmi dlouhých vln [49].

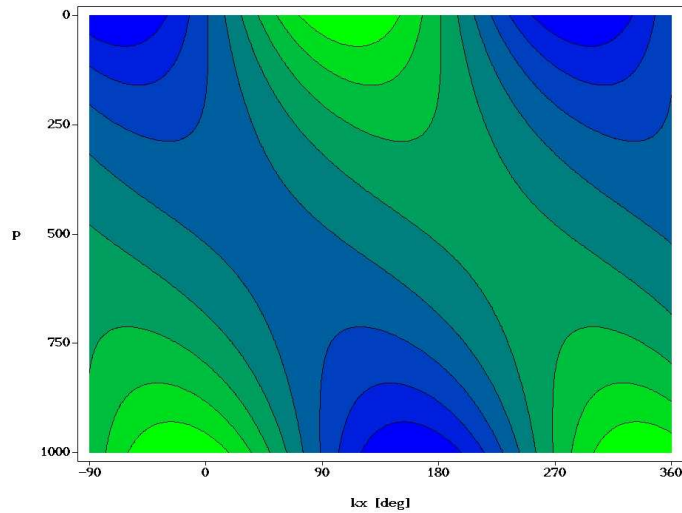
Protože stávající část zakončíme poznámkou o volbě střední hodnoty parametru statické stability, zastavme se podrobněji u problematiky vlivu stability vertikálního zvrstvení atmosféry na růstový faktor různě dlouhých vlnových poruch. Podle [39] změny zvrstvení ve spodních vrstvách atmosféry mezi 925 a 855 hPa nejvíce ovlivňuje stabilitu poruch s vlnovou délkou kolem 1 000 km. Změny zvrstvení ve střední troposféře výrazně působí na rychlost růstu (růstový faktor)  $kc_i$  poruch o vlnové délce 2 000 až 3 000 km, ale nemají již vůbec vliv na kratší poruchy. Změny vertikálního zvrstvení atmosféry v jejích nejvyšších hladinách mají pouze velmi slabý vliv na růstový faktor poruch všech vlnových délek.



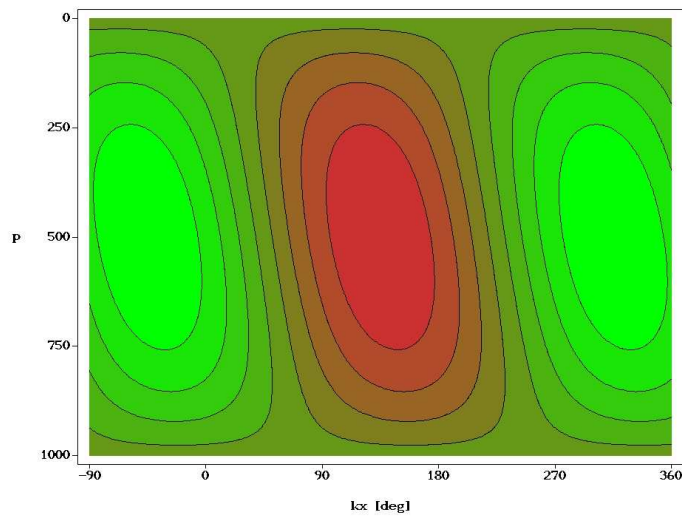
Obr. 17.7 Pole geopotenciálu dominantní poruchy. Tlaková výše je znázorněna žlutou barvou, zatímco oblast nízkého tlaku hnědou barvou.



Obr. 17.8 Pole teploty dominantní poruchy. Oblast nejstudenějšího vzduchu je vykreslena modře, zatímco oblast teplého vzduchu červeně.



Obr. 17.9 Pole izobarické divergence dominantní poruchy. Oblast izobarické divergence je vykreslena modře, zatímco oblast izobarické konvergence zeleně.



Obr. 17.10 Pole zobecněné vertikální rychlosti dominantní poruchy. Oblast sestupných pohybů je podchycena hnědou barvou, zatímco oblast výstupných pohybů zelenou barvou.

Poznámka 8: zastavme se ještě u volby střední hodnoty parametru statické stability atmosféry  $\bar{\sigma}$ . Předpokládáme-li v troposféře teplotní gradient  $\partial T/\partial z = -0,0065 \text{ K/m}$  a dosadíme-li do definice parametru statické stability



$$\sigma \equiv -\frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p},$$

pomocí Poissonovy rovnice (definice potenciální teploty), stavové rovnice a rovnice hydrostatické rovnováhy, dostáváme

$$\sigma = \left(\frac{R}{p}\right)^2 \left(\frac{1}{c_p} - \frac{0,0065}{g}\right) T, \quad (*)$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \tilde{\kappa} \frac{T}{p}, \quad \text{kde} \quad \tilde{\kappa} = 0,0065 \frac{R}{g}.$$

Integrací poslední rovnice máme

$$T = T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\tilde{\kappa}},$$

což po dosazení do rovnice (\*) vede na vztah

$$\sigma = a_1 T_0 p^{a_2},$$

kde

$$a_1 = \frac{R^2}{p_0^{\tilde{\kappa}}} \left(\frac{1}{c_p} - \frac{0,0065}{g}\right) T,$$

$$a_2 = \tilde{\kappa} - 2$$

a  $T_0$  je teplota v tlakové hladině  $p_0 = 1000$  hPa. Střední hodnotu  $\sigma$  v jisté oblasti troposféry mezi tlakovými hladinami  $p_1$  a  $p_2$  získáme následovně

$$\bar{\sigma} = \frac{a_1 T_0}{p_1 - p_2} \int_{p_1}^{p_2} p^{a_2} dp = \frac{a_1 T_0}{(p_1 - p_2)(a_2 + 1)} (p_1^{a_2+1} - p_2^{a_2+1}).$$

Pomocí posledního vztahu se snadno přesvědčíme, že námi používaná hodnota  $\bar{\sigma} = 2 \cdot 10^{-6} \text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{Pa}^{-2}$  představuje střední hodnotu parametru statické stability atmosféry mezi tlakovými hladinami 1000 a 350 hPa při teplotě 288 K v hladině 1000 hPa.

### 17.3 Baroklinní instabilita v diskretním dvojrstevnatém modelu

Za zástupce vertikálně diskretních modelů baroklinní instability jsme zvolili dvojrstevnatý model na  $\beta$  rovině. Základní vlastnosti modelu byly popsány Holtonem [3,43,42] a v české odborné literatuře pak v publikaci [5], ačko-

liv kořeny tohoto modelu sahají až k Phillipsovi [50]. V následující části rozbor modelu provedený jak v [3,43], tak i v [5], podstatným způsobem rozšiřujeme a všímáme si souvislosti tohoto modelu s dalšími modely baroklinní instability, zejména s Eadyho modelem a advekčním modelem Sutcliffovým.

Geometrie modelu je znázorněna na obrázku 17.11, ze kterého je patrné, že se model skládá ze dvou vrstev o tloušťce  $\Delta p = 500$  hPa; pracujeme tedy opět v  $p$  systému. Základní stav budeme uvažovat jako zonální proudění o rychlosti  $U$  závislé pouze na vertikální souřadnici:

$$U(p), \quad \bar{v} = 0, \quad \bar{\omega} = 0. \quad (17.58a)$$

Na základní stav nechť jsou superponovány poruchy v poli proudění

$$v'(x, p, t), \quad \omega'(x, p, t). \quad (17.58b)$$

Výsledné pole proudění má tedy tvar

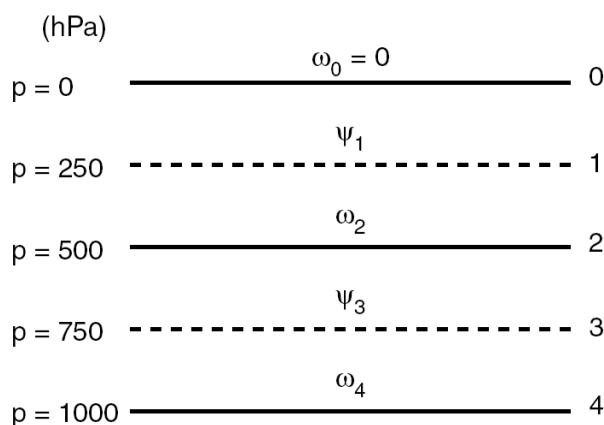
$$U(p), \quad v'(x, p, t), \quad \omega'(x, p, t), \quad (17.58c)$$

kterému odpovídá proudová funkce

$$\psi = \bar{\psi}(y, p) + \psi'(x, p, t), \quad (17.59a)$$

kde

$$U(p) = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}(p). \quad (17.59b)$$



Obr. 17.11 Uspořádání dvojrstevnatého modelu baroklinní instability.

Perturbační proudovou funkci  $\psi'$  a zobecněnou vertikální rychlost  $\omega'$  budeme uvažovat ve tvaru normálních modů

$$\psi' = \hat{\psi}(p)e^{ik(x-ct)}, \quad \omega' = \hat{\omega}(p)e^{ik(x-ct)}. \quad (17.60)$$

Jak je na schématu modelu (obr. 17.11) naznačeno, rychlost základního proudění a odpovídající proudovou funkci zadáváme uprostřed horní a spodní vrstvy atmosféry o tloušťce  $\Delta p$ , tedy v hladinách označených 1 a 3, zatímco zobecněnou vertikální rychlost explicitně udáváme na rozhraní obou vrstev, tedy v hladině 2. Přitom na horní a spodní hranici atmosféry zavedeme přirozené okrajové podmínky  $\omega'_0 = \omega'_4 = 0$ . Místo (17.59) a vztahu pro zobecněnou vertikální rychlost můžeme tedy psát

$$\psi_1 = -U_1 y + \psi'_1(x, t), \quad \psi_3 = -U_3 y + \psi'_3, \quad \omega_2 = \omega'_2, \quad (17.61)$$

kde perturbační veličiny vyjádříme ve tvaru (17.60).

Výchozími rovnicemi pro fyzikální popis modelu bude rovnice vorticity (15.1), kterou budeme aplikovat v hladinách 1 a 3, a termodynamická rovnice (15.16), kterou použijeme na rozhraní obou vrstev, tedy v hladině 2. Věnujme se nejprve úpravě rovnice vorticity a dosadíme do ní vyjádření (17.61) a (17.60), čímž dostaneme

$$ik[\beta - k^2(U_1 - c)]\hat{\psi}_1 - \frac{f_0 \hat{\omega}_2}{\Delta p} = 0, \quad (17.62a)$$

$$ik[\beta - k^2(U_3 - c)]\hat{\psi}_3 + \frac{f_0 \hat{\omega}_2}{\Delta p} = 0. \quad (17.62b)$$

V posledních vztazích jsme aproximovali vertikální gradient zobecněné vertikální rychlosti v hladinách 1 a 3 následovně:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)_1 = \frac{\omega_2 - \overbrace{\omega_0}^{=0}}{\Delta p} = \frac{\omega_2}{\Delta p}, \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)_3 = \frac{\overbrace{\omega_4}^{=0} - \omega_2}{\Delta p} = -\frac{\omega_2}{\Delta p}. \quad (17.62c)$$

Termodynamická rovnice (15.16) má v hladině 2 tvar

$$ik(U_3 - c)\hat{\psi}_1 - ik(U_1 - c)\hat{\psi}_3 - \frac{\Delta p \sigma_2}{f_0} \hat{\omega}_2 = 0, \quad (17.63a)$$

kde jsme využili podobných přibližných vztahů jako pro gradient  $\partial \omega / \partial p$  v hladinách 1 a 3, konkrétně

$$\left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial p}\right)_2 = \frac{\hat{\psi}_3 - \hat{\psi}_1}{\Delta p}, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_2 = \frac{U_3 - U_1}{\Delta p}, \quad \hat{\psi}_2 = \frac{\hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_3}{2}. \quad (17.63b)$$

Rovnice (17.62a), (17.62b) a (17.63a) tvoří homogenní soustavu tří algebraických rovnic pro neznámé  $\hat{\psi}_1$ ,  $\hat{\psi}_3$  a  $\hat{\omega}_2$ . Z elementární algebry je dobře známo, že taková soustava má netriviální řešení právě tehdy, když determinant jejich koeficientů je roven nule, tedy

$$\begin{vmatrix} ik[\beta - k^2(U_1 - c)] & 0 & -\frac{f_0}{\Delta p} \\ 0 & ik[\beta - k^2(U_3 - c)] & \frac{f_0}{\Delta p} \\ ik(U_3 - c) & -ik(U_1 - c) & -\frac{\Delta p \sigma_2}{f_0} \end{vmatrix} = 0. \quad (17.64)$$

Rozvoj tohoto determinantu vede na kvadratickou rovnici pro fázovou rychlost  $c$

$$(k^4 + 2k^2\lambda^2)c^2 + [2k^2\beta - k^4(U_1 + U_3) + 2\beta\lambda^2 - 2k^2(U_1 + U_3)\lambda^2]c + \beta^2 - k^2\beta(U_1 + U_3) + k^4U_1U_3 - \beta(U_1 + U_3)\lambda^2 + k^2(U_1^2 + U_3^2)\lambda^2 = 0 \quad (17.65)$$

kam jsme zavedli parametr  $\lambda$  vztahem

$$\lambda^2 \equiv \frac{f_0^2}{\sigma_2(\Delta p)^2}, \quad (17.66)$$

který je tedy nepřímo úměrný parametru statické stability atmosféry a pro obvyklé poměry ve střední troposféře středních zeměpisných šířek je  $\lambda^2 = 2 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-2}$  [3]. Řešením rovnice (17.65) získáme pro fázovou rychlost vyjádření

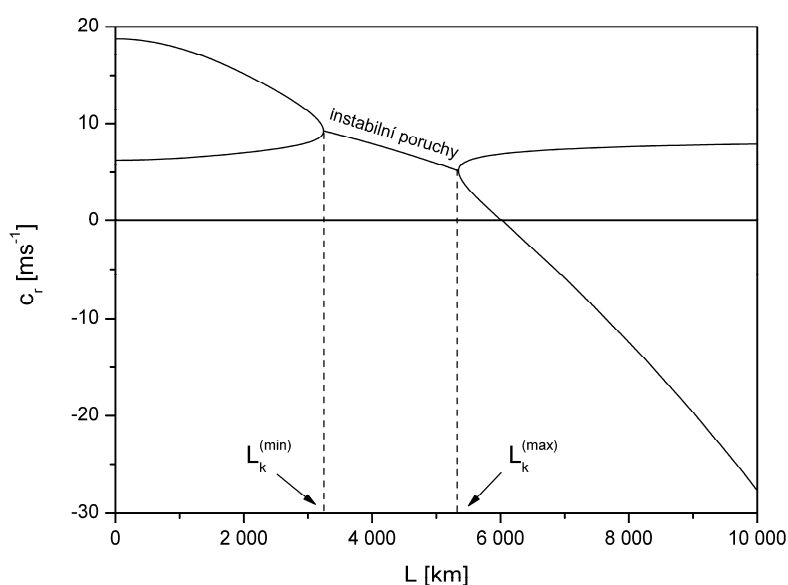
$$c = \frac{U_1 + U_3}{2} - \frac{\beta(k^2 + \lambda^2)}{k^4 + 2k^2\lambda^2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2\lambda^4}{(k^4 + 2k^2\lambda^2)^2} - \frac{(U_1 - U_3)^2(2\lambda^2 - k^2)}{4(k^2 + 2\lambda^2)}}. \quad (17.67)$$

Je-li v posledním vztahu výraz pod odmocninou kladný, šíří se modelem dvě poruchy s neproměnnou amplitudou. Jedna z poruch se pohybuje rychleji, druhá pomaleji. Je-li však výraz pod odmocninou v (17.67) záporný, obdržíme dvě poruchy s časově proměnnou amplitudou, z nichž jedna je

s časem sílí a druhá slábnoucí. Translační rychlost, tedy reálná část fázové rychlosti  $c$ , je znázorněna na [obrázku 17.12](#). Je z něho patrné, že obě poruchy s proměnnou amplitudou se pohybují stejnou rychlostí (na obrázku je příslušná závislost označena jako „instabilní poruchy“), zatímco perturbace s konstantní amplitudou mají každá jinou rychlost, přičemž jedna z velmi dlouhých stabilních poruch je silně retrográdní. Na rozdíl od spojitého modelu na  $f$  rovině (oddíl 17.2) je vidět, že se rychlost sílí i slábnoucí perturbace mění v závislosti na vlnové délce ([srovnej obrázky 17.12 a 17.2](#)), což nebylo pozorováno při  $\beta = 0$ . Rovněž je evidentní, že dostatečně dlouhé vlny jsou opět stabilizovány.

To je ještě patrnější, vyjádříme-li ze vztahu (17.67) růstový faktor  $kc_i$

$$kc_i = k \sqrt{\frac{(U_1 - U_3)^2 (2\lambda^2 - k^2)}{4(k^2 + 2\lambda^2)} - \frac{\beta^2 \lambda^4}{(k^4 + 2k^2 \lambda^2)^2}}, \quad (17.68)$$



Obr. 17.12 Translační rychlost poruch v závislosti na vlnové délce.

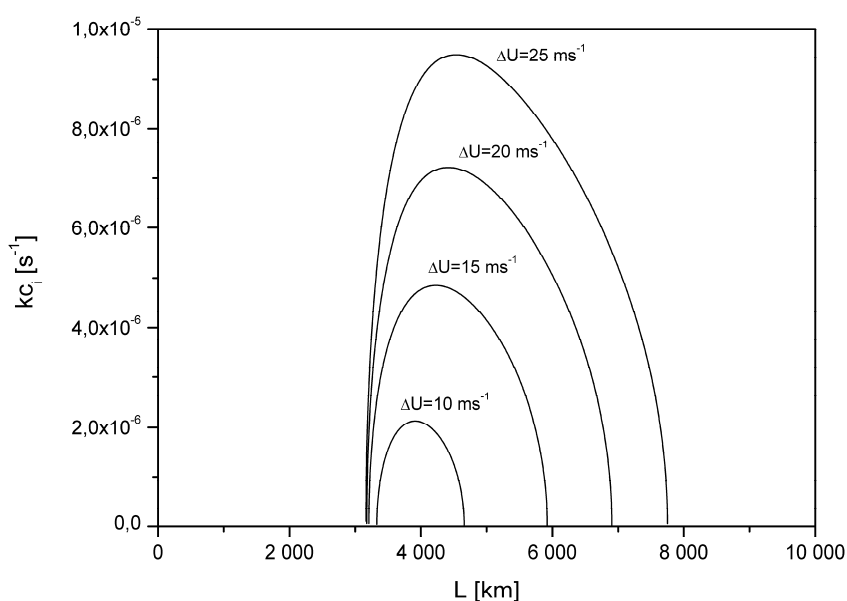
jehož závislost na vlnové délce  $L$  je znázorněna na [obrázku 17.13](#). Je vidět, že rychlost růstu (růstový faktor) závisí na rozdílu rychlosti zonálního proudění mezi hladinami  $\Delta U \equiv U_1 - U_3$ . Všimněme si, že pro různé hodnoty  $\Delta U$  nabývá  $kc_i$  maxima pro různé vlnové délky. Příslušná vlnová  $L_D$  délka odpovídá dominantní poruše, tak jak jsme o ní již psali v oddíle 17.2. Při zadaném rozdílu rychlostí  $\Delta U$  dominantní porucha splňuje rovnici

$$\frac{d}{dk}(kc_i) = 0. \quad (17.69)$$

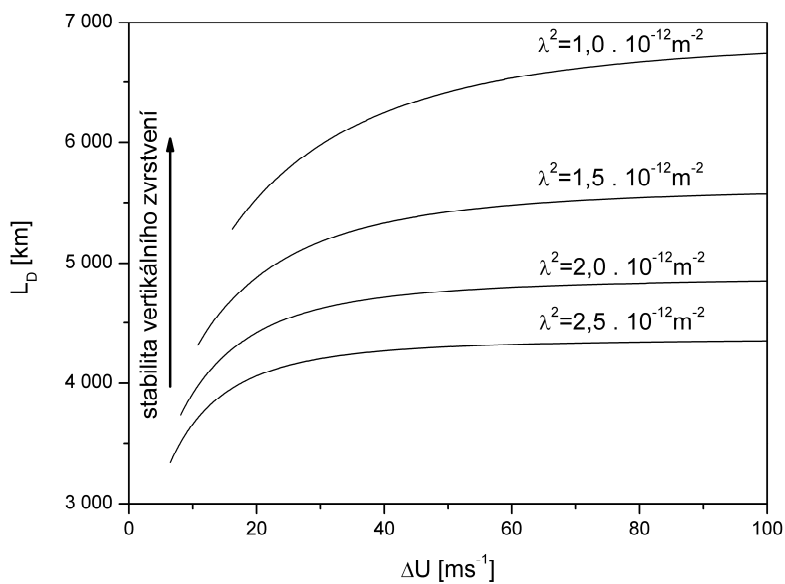
Dosazením vztahu (17.68) do posledního výrazu a provedením příslušné derivace získáme rovnici

$$(\Delta U)^2 k^4 (k^2 + 2\lambda^2)^2 (4\lambda^4 - k^4 - 4\lambda^2 k^2) + 4\beta^2 \lambda^4 (3k^4 + 8\lambda^2 k^2 + 4\lambda^4) = 0, \quad (17.70)$$

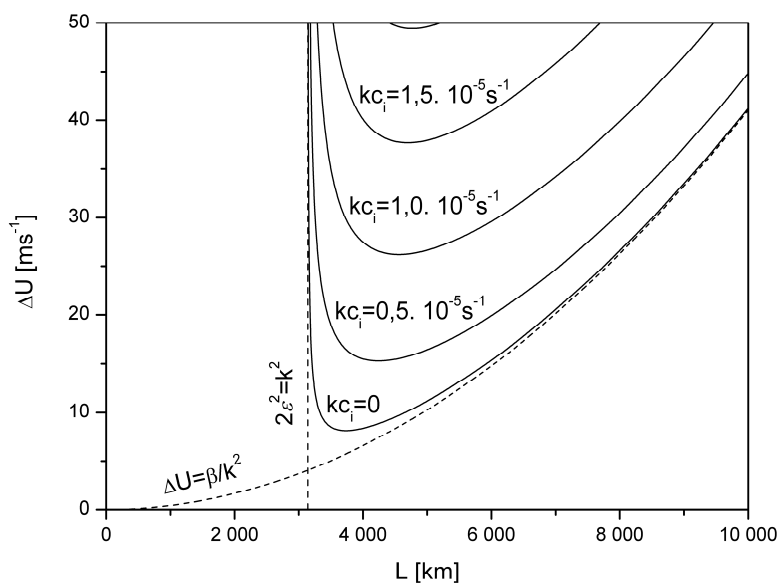
kteřou je třeba řešit numericky. Výsledek je pro několik hodnot parametru  $\lambda^2$  znázorněn na obrázku 17.14. Z něho je dobře vidět, že s rostoucím rozdílem rychlosti proudění  $\Delta U$ , tedy gradientem rychlosti proudění mezi hladinami 750 a 250 hPa, se vlnová délka dominantní poruchy posouvá k větším hodnotám. Tato závislost je nejpatrnější pro menší hodnoty  $\Delta U$ , zatímco pro větší hodnoty rozdílu rychlosti proudění je tato závislost poněkud potlačena. Není bez zajímavosti, že pro velmi velké hodnoty  $\Delta U$  se vlnová délka dominantní poruchy blíží hodnotě, kterou by měla při  $\beta=0$ . Z obrázku 17.14 také jednoznačně vyplývá, že vlnová délka  $L_D$  dominantní poruchy roste se zvětšující se stabilitou vertikálního zvrstvení atmosféry (menší  $\lambda^2$ ).



Obr. 17.13 Růstový faktor poruch v závislosti na vlnové délce pro různé rozdíly rychlosti proudění mezi hladinami 250 a 750 hPa.



Obr. 17.14 Závislost dominantní vlnové délky na rozdílu rychlosti proudění mezi hladinami 250 a 750 hPa a na míře stability vertikálního zvrstvení atmosféry.



Obr. 17.15 Izočáry růstového faktoru poruch v závislosti na vlnové délce a rozdílu rychlosti proudění mezi hladinami 250 a 750 hPa.

Na obrázku 17.15 je zachycena informace obsažená v jiné formě v obrázku 17.13, totiž průběh růstového faktoru  $kc_i$  pro různé hodnoty vertikálního gradientu zonálního proudění a vlnové délky poruch. Ze strany krátkých vln je nestabilní oblast (charakterizovaná nerovností  $kc_i > 0$ ) omezena hranicí danou rovností  $2\lambda^2 = k^2$ . Tomu odpovídá vlnová délka

$$L_k^{(\min)} = \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{2}, \quad (17.71)$$

kteřá je pro  $\lambda^2 = 2 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-2}$  rovna přibližně 3 140 km. Pro dostatečně dlouhé vlny,  $k \rightarrow 0$ , se výraz pod odmocninou ve vztahu (17.68) redukuje na rovnost  $\Delta U = \beta/k^2$ , která vymezuje dlouhovlnnou hranici nestabilní oblasti. Odpovídají jí vlnové délky

$$L_k^{(\max)} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta U}{\beta}}. \quad (17.72)$$

Z obrázku 17.15 a rozboru vztahu (17.68) můžeme dovodit, že se instabilní (s časem rostoucí) poruchy objevují až při jisté minimální hodnotě rozdílu rychlosti proudění  $(\Delta U)_{\min}$  mezi hladinami 1 a 3. Položíme-li v (17.68) růstový faktor roven nule a vyjádříme  $\Delta U = U_1 - U_3$ , získáme

$$\Delta U = \pm \frac{2\beta\lambda^2}{k^2} \sqrt{\frac{1}{4\lambda^4 - k^4}}. \quad (17.73)$$

Dosazením posledního výrazu do rovnice

$$\frac{d}{dk}(\Delta U) = 0,$$

tedy určením minima  $\Delta U$  v závislosti na vlnovém čísle  $k$ , zjistíme, že toto minimum nastává pro vlnové číslo  $k = 2^{1/4}\lambda$ . Po dosazení této hodnoty vlnového čísla do vztahu (17.73) tomu odpovídá minimální hodnota rozdílu rychlosti proudění

$$(\Delta U)_{\min} = \frac{\beta}{\lambda^2}. \quad (17.74)$$

Při dříve používaných hodnotách  $\lambda^2 = 2 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-2}$  a  $\beta = 1,62 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  vychází  $(\Delta U)_{\min} = 8 \text{ ms}^{-1}$ .

Věnujme nyní pozornost některým speciálním jednodušším případům. Uvažujme základní stav za ryze barotropní bez přítomnosti vertikálního

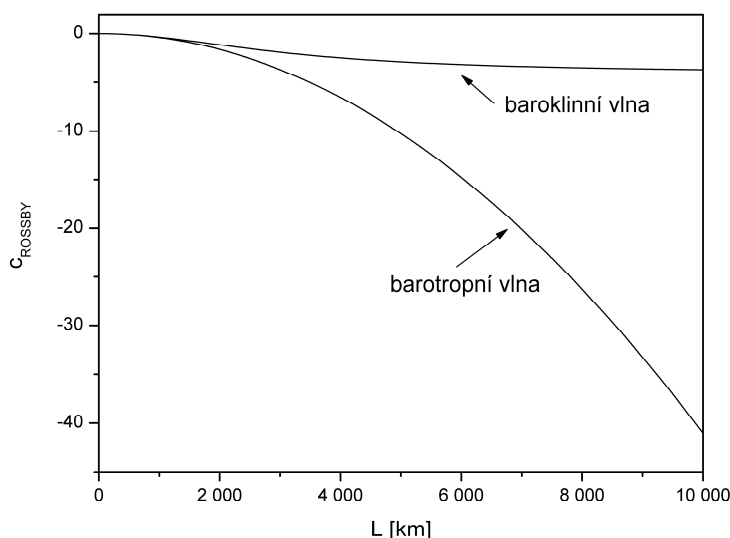


gradientu rychlosti proudění, to znamená, že  $U_1 \equiv U_3 \equiv U$ . Z (17.67) získáme pro fázovou rychlost poruch dvě hodnoty, a to

$$c_{\text{ROSSBY}}^+ = U - \frac{\beta}{k^2 + 2\lambda^2}, \quad (17.75a)$$

$$c_{\text{ROSSBY}}^- = U - \frac{\beta}{k^2}. \quad (17.75b)$$

Druhý vztah, pro  $c_{\text{ROSSBY}}^-$ , představuje známý výraz pro fázovou rychlost klasických barotropních Rossbyho vln, zatímco první formule, pro  $c_{\text{ROSSBY}}^+$ , vyjadřuje fázovou rychlost vnitřní baroklinní Rossbyho vlny [3]. Není obtížné se přesvědčit, že v případě fázové rychlosti vln dané vztahem (17.75a), jsou perturbace v poli proudové funkce  $\psi'_1$  a  $\psi'_3$ , a tedy i geopotenciálu  $\phi'_1$  a  $\phi'_3$ , v hladinách 250 a 750 hPa vzájemně posunuty o  $180^\circ$ . Přicházíme tak k zajímavému zjištění: Ačkoliv základní stav je představován barotropní atmosférou, perturbace mají baroklinní charakter [3]. Fázová rychlost obou stabilních Rossbyho vln při nulovém dopplerovském posuvu ( $U=0$ ) je znázorněna na obrázku 17.16. Vidíme, že barotropní vlna je velmi retrográdní s rostoucí rychlostí a zvětšující se vlnovou délkou, zatímco baroklinní vykazuje poměrně slabou závislost fázové rychlosti na vlnové délce, navíc má tato vlna jen velmi slabou tendenci k retrogresi – poměrně slabé západní proudění postačuje k tomu, aby byla baroklinní vlna unášena od západu směrem na východ.



Obr. 17.16 Translační rychlost Rossbyho vln v dvojvrstevnatém modelu při  $U=0$ .

Položíme-li nyní  $\beta = 0$ , redukuje se vztah (17.67) na

$$c = \frac{U_1 + U_3}{2} \pm \frac{U_1 - U_3}{2} \sqrt{\frac{k^2 - 2\lambda^2}{k^2 + 2\lambda^2}}, \quad (17.76)$$

což je dvouvrstevná analogie vztahu (17.22), který jsme získali v předchozím oddíle pro model Eadyho typu na  $f$  rovině. Je patrné, že v tomto zjednodušeném případě jsou všechny poruchy s vlnovou délkou větší než kritická vlnová délka  $L_{kf}$  instabilní v tom smyslu, že jedna z dvojice vln svoji amplitudu s časem zvětšuje a druhá zmenšuje. Hodnota  $L_{kf}$  je dána nulovou hodnotou výrazu pod odmocninou v (17.76) a zároveň tvoří krátkovlnnou hranici mezi stabilní a instabilní oblastí spektra vlnových poruch v obecném případě (viz [obrázek 17.15](#)). Tato hranice je dána vztahem (17.71), který je možné s přihlédnutím k (17.66) převést na tvar

$$L_{kf} = L_k^{(\min)} = \frac{\pi \Delta p}{f_0} \sqrt{2\sigma_2} \doteq 2,157 \cdot 10^9 \sqrt{\sigma_2} \quad [m]. \quad (17.77)$$

Růstový faktor  $kc_i$  je při  $\beta = 0$  roven

$$kc_i = \frac{k(U_1 - U_3)}{2} \sqrt{\frac{2\lambda^2 - k^2}{2\lambda^2 + k^2}}. \quad (17.78)$$

Položíme-li  $d(kc_i)/dk = 0$ , získáme po výpočtu rovnici

$$k^4 + 4\lambda^2 k^2 - 4\lambda^4 = 0, \quad (17.79)$$

jejímž řešením a použitím  $k = 2\pi/L$  máme pro dominantní poruchu

$$L_{Df} = \frac{\pi}{\lambda} \sqrt{2 + 2\sqrt{2}} \doteq 3,251 \cdot 10^9 \sqrt{\sigma_2} \quad [m]. \quad (17.80)$$

Tento vztah představuje dvouvrstevnou analogii vztahu (17.29) z kapitoly 17.2. Při  $\lambda^2 = 2 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-2}$  vychází  $L_{Df} \approx 4\,880 \text{ km}$ .

Jako poslední speciální případ uvažujme situaci, kdy  $\lambda \rightarrow \infty$ . Není obtížné ukázat, že to odpovídá situaci, kdy jsou teplotní změny v modelu způsobeny pouze horizontální (izobarickou) advekci teploty [12]. Tento advekční model je zejména spojen se jménem Sutcliffa [51]. V takovém modelu ze vztahu (17.67) získáme pro fázovou rychlost poruch výraz

$$c = \frac{U_1 + U_2}{2} - \frac{\beta}{2k^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2}{k^4} - (U_1 - U_3)^2}, \quad (17.81)$$

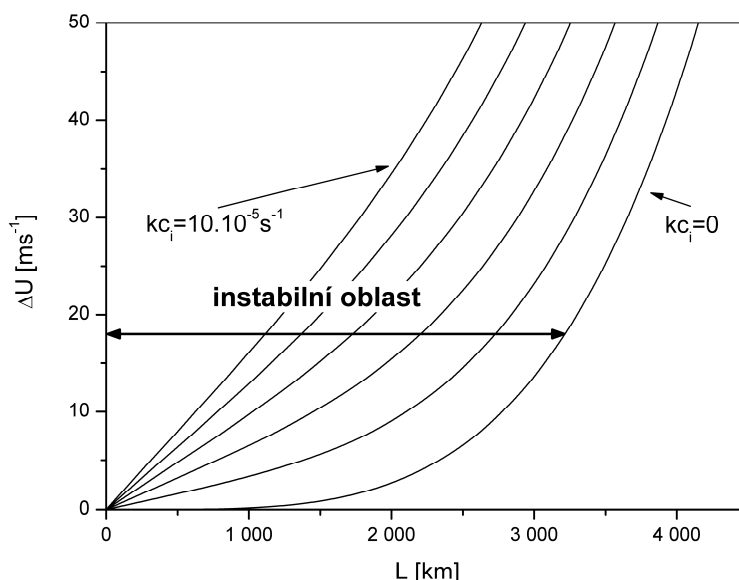
ze kterého je patrné, že poruchy s vlnovou délkou kratší než kritická vlnová délka, určená nulovou hodnotou výrazu pod odmocninou v (17.81), jsou instabilní (jedna se zvětšující a druhá se zmenšující se amplitudou). Kritická vlnová délka v advekčním modelu je dána vztahem

$$L_{ka} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta U}{\beta}}, \quad (17.82)$$

který je tedy shodný s výrazem (17.72) pro dlouhovlnnou hranici mezi stabilní a instabilní oblastí v obecném případě. Všimněme si, že u advekčního modelu máme opačnou situaci než v případě modelu s  $\beta = 0$ ; dostatečně krátké vlny jsou instabilní (musí být samozřejmě  $U_1 \neq U_3$ ), zatímco dostatečně dlouhé vlnové poruchy jsou stabilní. Pro úplnost ještě uveďme vztah pro růstový faktor instabilních vln v advekčním modelu

$$kc_i = \sqrt{(\Delta U)^2 k^2 - \frac{\beta^2}{k^2}}. \quad (17.83)$$

Pro pevně zadaný rozdíl rychlosti proudění  $\Delta U$  se růstový faktor zvětšuje s klesající vlnovou délkou. To je dobře patrné z [obrázku 17.17](#), na kterém je v rovině  $\Delta U, L$  vykresleno několik izochar růstového faktoru. Srovnajte tento obrázek s [obrázkem 17.15](#).



Obr. 17.17 Stabilní diagram pro dvojvrstevnatou analogii Sutcliffova advekčního modelu.

Po několika speciálních případech se vraťme k situaci obecné a věnujme nejprve pozornost poruchám s neproměnnou amplitudou, které budeme označovat jako stabilní. Sečteme-li rovnice (17.62a) a (17.62b), získáme po úpravě

$$\hat{\psi}_1 = -\frac{\frac{\beta}{k^2} - (U_3 - c)}{\frac{\beta}{k^2} - (U_1 - c)} \hat{\psi}_3 \quad (17.84)$$

a pro perturbační proudové funkce pak můžeme psát

$$\psi'_1 = -\frac{\frac{\beta}{k^2} - (U_3 - c)}{\frac{\beta}{k^2} - (U_1 - c)} \psi'_3 e^{ik(x-ct)}, \quad (17.85a)$$

$$\psi'_3 = \hat{\psi}_3 e^{ik(x-ct)}. \quad (17.85b)$$

Dosažením za fázovou rychlost pomocí (17.67) do posledních vztahů snadno zjistíme, že rychlejší (pro pevně zadanou vlnovou délku; viz [obrázek 17.12](#)) stabilní vlnové poruchy v poli proudové funkce (a tedy i geopotenciálu) mají větší amplitudu v hladině 250 hPa než v hladině 750 hPa. Avšak pomalejší stabilní vlny s kratší vlnovou délkou (na obrázcích 17.12 a 17.13 leží nalevo od instabilní oblasti) mají amplitudu větší v hladině 750 hPa než v hladině 250 hPa. Ale dlouhé (leží napravo od instabilní oblasti v naposledy zmíněných obrázcích) pomalejší stabilní poruchy jsou výraznější opět v hladině 250 hPa než v hladině 750 hPa. Opět není obtížné nahlédnout, že v hladinách 750 a 250 hPa jsou kratší rychlejší stabilní poruchy a všechny pomalejší stabilní vlnové poruchy ve fázi, zatímco dlouhé rychlejší stabilní vlny jsou ve zmíněných hladinách v opačné fázi (jsou vzájemně posunuty o  $180^\circ$ ).

Výraz pro perturbace v poli teploty v hladině 2 (500 hPa) získáme integrací rovnice (17.40) mezi hladinami 1 a 3:

$$T'_2 = \frac{f_0}{R \ln \frac{p_3}{p_1}} (\hat{\psi}_1 - \hat{\psi}_3) e^{ik(x-ct)} = \frac{1}{R \ln \frac{p_3}{p_1}} (\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_3) e^{ik(x-ct)}, \quad (17.86)$$

kde jsme využili přibližného vztahu mezi proudovou funkcí a geopotenciálem  $\phi' = f_0 \psi'$ . Rozdíl amplitud  $\hat{\psi}_1$  a  $\hat{\psi}_3$  ve výrazu (17.86) je možné upravit pomocí (17.84) takto:

$$\psi'_1 - \psi'_3 = \frac{U_1 + U_3 - 2\left(\frac{\beta}{k^2} + c\right)}{\frac{\beta}{k^2} + c - U_1} \hat{\psi}_3. \quad (17.87)$$

Dosažením za fázovou rychlost  $c$  z (17.67) do (17.84) a (17.87) získáme informace o vzájemném vztahu polí perturbací v poli geopotenciálu (proudové funkce) a teploty. Podrobný rozbor uvedených vztahů lze shrnout následovně: Rychlejší stabilní poruchy s kratší vlnovou délkou představují teplý hřeben a studenou brázdou s největší amplitudou ve vyšších hladinách atmosféry (250 hPa). Dlouhé rychleji se pohybující stabilní perturbace reprezentují v hladině 250 hPa opět teplý hřeben a studenou brázdou, zatímco v hladině 750 hPa je jejich uspořádání opačné. Kratší pomalejší stabilní poruchy představují analogické uspořádání jako rychlejší dlouhé stabilní poruchy s tím rozdílem, že jsou výrazněji vyjádřeny v hladině 750 hPa než 250 hPa. Dlouhé pomalejší stabilní perturbace reprezentují studenou brázdou a teplý hřeben, které jsou nejvýraznější ve vyšších hladinách atmosféry (250 hPa).

Naše největší pozornost pochopitelně soustředěna na poruchy instabilní, zejména ty, jejichž amplituda se s časem zvětšuje. Rozepíšeme-li fázovou rychlost instabilních poruch na reálnou a imaginární část  $c = c_r + ic_i$  a toto vyjádření zavedeme do vztahu (17.84), můžeme místo (17.85) uvést tyto vztahy pro perturbace v poli proudové funkce:

$$\psi'_1 = |\hat{\psi}_1| e^{kc_it} e^{i(kx + \alpha_\psi - kc_r t)}, \quad (17.88a)$$

$$\psi'_3 = |\hat{\psi}_3| e^{kc_it} e^{i(kx - kc_r t)}, \quad (17.88b)$$

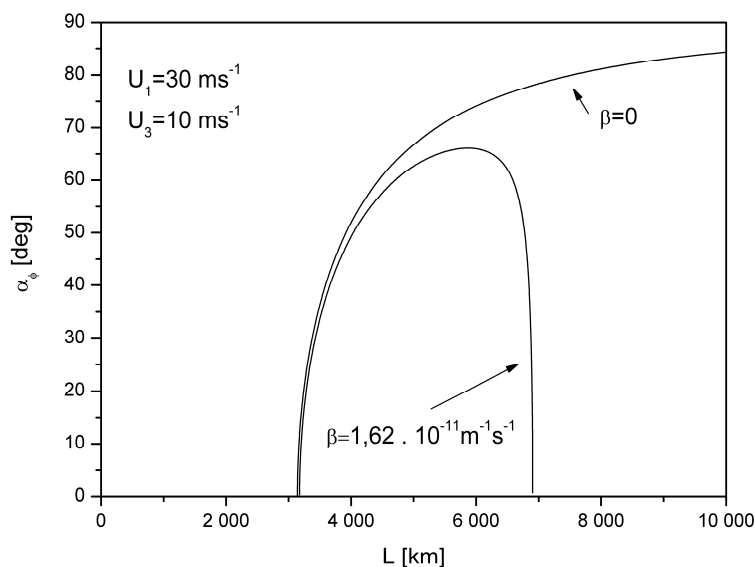
kde

$$|\hat{\psi}_1| = \frac{\sqrt{\left[ \left( U_1 - \frac{\beta}{k^2} - c_r \right) \left( \frac{\beta}{k^2} + c_r - U_3 \right) - c_i^2 \right] + [c_i(U_1 - U_3)]^2}}{\left( \frac{\beta}{k^2} + c_r - U_1 \right)^2 + c_i^2} |\hat{\psi}_3| \quad (17.88c)$$

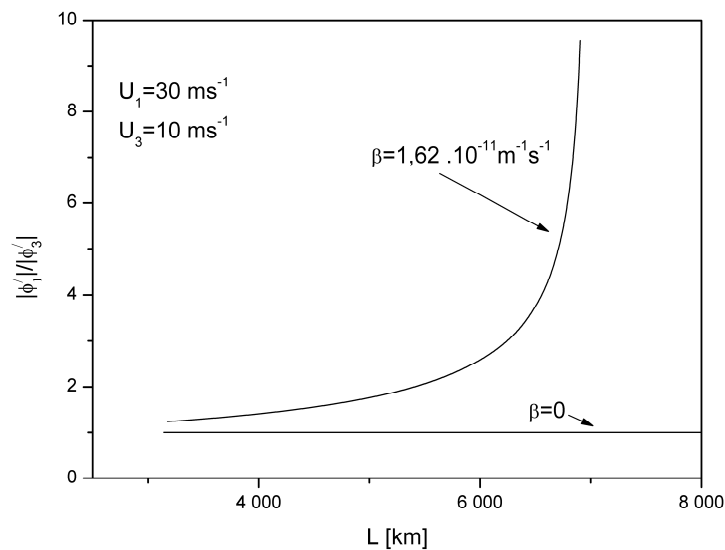
a

$$\operatorname{tg} \alpha_\psi = \frac{c_i(U_1 - U_3)}{\left( U_1 - \frac{\beta}{k^2} - c_r \right) \left( \frac{\beta}{k^2} + c_r - U_3 \right) - c_i^2}. \quad (17.88d)$$

Opět připomeňme, že vztahem (17.88c) jsou provázány i amplitudy perturbací v poli geopotenciálu  $|\phi'_1|$  a  $|\phi'_3|$ , a dále, že pro fázový úhel perturbací geopotenciálu je  $\alpha_\phi = \alpha_\psi$ .



Obr. 17.18 Fázový předstih sílicích poruch v poli geopotenciálu v hladině 750 hPa před vlnou v hladině 250 hPa.



Obr. 17.19 Poměr amplitud instabilních poruch v poli geopotenciálu mezi hladinami 250 hPa (1) a 750 hPa (3).

Rozborem zápisu (17.88d) se můžeme přesvědčit, že pro sílicí poruchu ( $c_i > 0$ ) předstihuje vlna v poli geopotenciálu (proudové funkce) v hladině 750 hPa vlnu v hladině 250 hPa. U slábnoucí poruchy ( $c_i < 0$ ) je tomu naopak. Zmíněný předstih pro sílicí poruchy a uvedené rychlosti základního zonálního proudění je v závislosti na vlnové délce znázorněn na [obrázku 17.18](#). Vidíme, že tento předstih může dosahovat přibližně až  $65^\circ$ . Pro porovnání je na zmíněném obrázku uveden tento předstih i pro případ  $\beta = 0$ , kdy se s rostoucí vlnou délkou blíží až k  $90^\circ$ . Odpověď na otázku, zda je instabilní porucha výraznější v hladině 750 nebo 250 hPa, můžeme nalézt na [obrázku 17.19](#). Vidíme, že v poli geopotenciálu jsou sílicí poruchy výrazněji vyjádřeny v hladině 250 než 750 hPa. V počátečních stádiích vývoje jsou tedy popsané poruchy spíše výškovými útvary. Přitom se poměr  $|\phi'_1|/|\phi'_3|$  zvětšuje téměř exponenciálně s rostoucí vlnovou délkou. Pro zajímavost je na zmíněném obrázku znázorněna i situace pro  $\beta = 0$ ; je patrné, že v tomto případě jsou poruchy symetrické, což koneckonců také dobře odpovídá i zjištěním z oddílu 17.2.

Perturbace v teplotním poli pro sílicí poruchy získáme podobně, a to dosazením  $c = c_r + ic_i$  do (17.87). Po úpravách místo vztahu (17.86) dostaneme

$$T'_2 = |\hat{T}_2| e^{kc_it} e^{i(kx - \alpha_r - kc_r t)}, \quad (17.89a)$$

kde

$$|\hat{T}_2| = \frac{f_0}{R \ln \frac{p_3}{p_1}} \times \sqrt{\frac{\left[ \left( U_1 + U_3 - 2c_r - 2\frac{\beta}{k^2} \right) \left( \frac{\beta}{k^2} + c_r - U_1 \right) - 2c_i^2 \right]^2 + c_i^2 (U_1 - U_3)^2}{\left( \frac{\beta}{k^2} + c_r - U_1 \right)^2 + c_i^2}} |\hat{\psi}_3| \quad (17.89b)$$

a

$$\text{tg } \alpha_r = \frac{c_i (U_1 - U_3)}{\left( U_1 + U_3 - 2c_r - 2\frac{\beta}{k^2} \right) \left( \frac{\beta}{k^2} + c_r - U_1 \right) - 2c_i^2}. \quad (17.89c)$$

Zobecněnou vertikální rychlost  $\omega'_2$  v hladině 500 hPa určíme pomocí vztahu (17.60), do kterého dosadíme (17.62a) nebo (17.62b). Po analogických úpravách jako v předcházejících případech můžeme psát

$$\omega'_2 = |\hat{\omega}_2| e^{kc_r t} e^{i(kx + \alpha_\omega - kc_r t)}, \quad (17.90a)$$

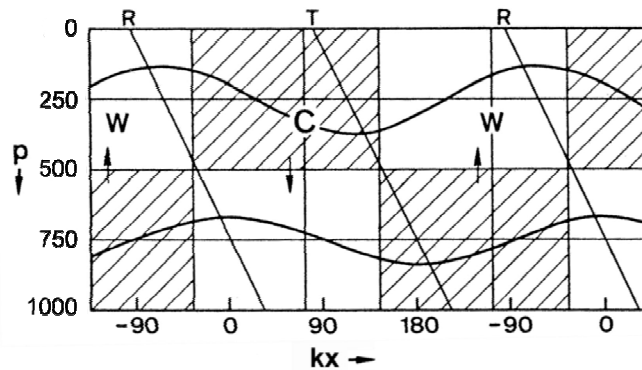
kde

$$|\hat{\omega}_2| = \frac{\Delta p k^3}{f_0} \sqrt{\left[ c_r - \left( U_3 - \frac{\beta}{k^2} \right) \right]^2 + c_i^2} |\hat{\psi}_3| \quad (17.90b)$$

a také

$$\operatorname{tg} \alpha_\omega = \frac{U_3 - c_r - \frac{\beta}{k^2}}{c_i}. \quad (17.90c)$$

Schématické uspořádání perturbací v poli geopotenciálu, teploty a zobecněné vertikální rychlosti pro sílicí poruchu s vlnovou délkou 4 000 km a  $\Delta U = 20 \text{ ms}^{-1}$  je znázorněno na [obrázku 17.20](#). Maxima (minima) v poli geopotenciálu, která tedy odpovídají ose hřebenu (brázdě) vysokého (nízkého) tlaku, byla v jiných hladinách než 250 a 750 hPa získána lineární interpolací a extrapolací. Osa hřebene vysokého tlaku je označena jako R, osa brázd nízkého tlaku jako T. Podobným způsobem byla získána i osa oblasti nejteplejšího vzduchu (označená jako W) a osa nejchladnější oblasti (označená jako C). Na obrázku jsou dále vyznačeny šipkami maxima sestupných a výstupných pohybů. Šrafovane jsou vyznačeny oblasti izobarické konvergence, zatímco části bez šrafování představují oblasti izobarické divergence rychlosti proudění\*).



Obr. 17.20 Schématické uspořádání sílicí poruchy o vlnové délce  $L = 4\,000$  km ve dvouvrstevném modelu. Upraveno podle [42].

\*) Perturbace izobarické divergence jsme sice pro dvouvrstevný model explicitně neuvedli, nicméně výpočet  $\nabla_p \cdot \mathbf{v}'$  je poměrně přímočarý z rovnice kontinuity (17.47).



Porovnáme-li [obrázek 17.20](#), sestrojený pro dvouvrstevný model, s [obráz-  
kem 17.6](#), popřípadě [obrázky 17.7 až 17.10](#) získanými pro vertikálně spojitý  
model, je patrná jejich vzájemná kvalitativní shoda. Pochopitelně dvou-  
vrstevný model nemůže principiálně popsat strukturu poruch tak podrobně  
jako model spojitý. Pomocí dvouvrstevného modelu nemůžeme například  
usuzovat na sklon perturbací v poli teploty nebo zobecněné vertikální  
rychlosti. Přesto mají oba modely při popisu silicích baroklinních  
instabilních poruch řadu společných rysů – například situování maxima  
výstupných pohybů (a tedy případných srážek) před přízemní osu tlakové  
brázdy, nebo převládající izobarickou konvergenci v oblasti přízemní  
brázdy nízkého tlaku a opačně převažující izobarickou divergenci v pří-  
zemním tlakovém hřebenu. Další společnou vlastností je sklon osy oblasti  
nízkého tlaku spolu s rostoucí výškou do oblasti studeného vzduchu  
a oblasti vysokého tlaku do oblasti teplého vzduchu, což zároveň znamená,  
že se osy silicích (rodících se) tlakových útvarů naklání proti směru  
základního zonálního západního proudění. Uvedené skutečnosti převážně  
souhlasí s pozorováním ve skutečné atmosféře. To tedy podporuje teorii,  
podle které mohou synoptické útvary ve středních zeměpisných šířkách  
vznikat v podstatě z infinitezimálních perturbací baroklinně instabilního  
základního proudění. Na paměti je třeba stále mít, že oba modely baroklinní  
instability byly založeny na linearizovaných rovnicích a popisují tedy pouze  
ranná stádia vývoje skutečných atmosférických poruch.

V dvojrstevnatém modelu na  $\beta$  rovině jsme se setkali i s některými  
odlišnostmi od modelu na  $f$  rovině. Je to především stabilizace velmi dlou-  
hých vlnových poruch právě zahrnutím sférickosti Země, alespoň v podobě  
 $\beta$  rovinné aproximace. Další fundamentální odlišností je skutečnost, že se  
v modelu na  $\beta$  rovině objevují baroklinně instabilní poruchy až po překro-  
čení určité minimální hodnoty vertikálního gradientu základního zonálního  
proudění. Ze vztahu (17.74) je patrné, že tato minimální hodnota závisí opět  
na Rossbyho parametru  $\beta$ .

## LITERATURA K ČÁSTI I

- [1] Batchelor G. K.: An introduction to fluid dynamics, Cambridge University Press, 2000.
- [2] Landau L. D., Lifshitz E. M.: Fluid mechanics, Butterworth-Heinemann, 2. vyd., 1987.
- [3] Holton J. R.: An introduction to dynamic meteorology, 4. vyd., Elsevier Academic Press, 2004.
- [4] Dutton J. A.: Dynamics of atmospheric motion, Dover Publications, 1986.
- [5] Pechala F., Bednář J.: Příručka dynamické meteorologie, Academia, Praha, 1991.
- [6] Lin C. C.: Theory of hydrodynamic stability, Cambridge University Press, 1955.
- [7] Chandrasekhar S.: Hydrodynamic and hydrodynamic stability, Dover Publications, 1961.
- [8] Drazin P. G., Reid W. H.: Hydrodynamic stability, Cambridge University Press, 2. vyd., 2004.
- [9] Godrèche C., Manneville P.(eds.): Hydrodynamics and nonlinear instabilities, Cambridge University Press, 1998.
- [10] Pedlosky J.: Geophysical fluid dynamics, Springer, 2. vyd., 1987.
- [11] Cushman-Roisin B.: Introduction to geophysical fluid dynamics, Prentice Hall, 1994.
- [12] Zdunkowski W., Bott A.: Dynamics of the atmosphere. A course in theoretical meteorology, Cambridge University Press, 2003.
- [13] Charney J. G.: The dynamics of long waves in baroclinic westerly current, J. Meteor., 4 (1948), 135–162.
- [14] Zeytounian R. K.: Meteorological fluid dynamics. Asymptotic modeling, stability and chaotic atmospheric motion. Lecture notes in physics, Springer, 1991.
- [15] Dikij L. A.: Gidrodinamičeskaja ustrojčivost' i dinamika atmosfery, Gidrometeoizdat, 1976.
- [16] Drazin P. G.: Introduction to hydrodynamic stability, Cambridge University Press, 2002.
- [17] Nappo C. J.: An introduction to atmospheric gravity waves, Academic Press, 2002.
- [18] Bednář J., Zikmunda O.: Fyzika mezní vrstvy atmosféry, Academia, Praha, 1985.
- [19] Miles J.: On the stability of heterogeneous shear flows, J. Fluid. Mech., 10 (1961), 496–508.
- [20] Howard L. N.: Note on a paper of John W. Miles, J. Fluid. Mech., 10 (1961), 509–512.
- [21] Brdička M., Samek L., Sopko B.: Mechanika kontinua, Academia, Praha, 2000.
- [22] Faber T. E.: Fluid dynamics for physicists, Cambridge University Press, 1995.
- [23] Lesieur M.: Turbulence in fluids, Kluwer Academic Publishers, 3. vyd., 1997.
- [24] Belinskij V. A.: Dinamičeskaja meteorologija, Ogiz Goctechizdat, 1948.

- [25] Goldstein R. J., Graham D. L.: Stability of horizontal fluid layer with zero shear boundaries, *Phys. Fluids*, 12 (1969), 1133–1137
- [26] Van Mieghem J.: Atmospheric energetics, Clarendon Press, 1973.
- [27] Pielke R. A. SR.: Mesoscale meteorological modeling, Academic Press, 2. vyd., 2002.
- [28] Holton J. R., Curry J. A., Pyle J. A. (eds): Encyklopedia of atmospheric sciences, Academic Press, 2003.
- [29] Kantha L. H, Clayson C. A.: Small scale processes in geophysical fluid flow, Academic Press, 2000.
- [30] Kuo H.-L.: Dynamic instability of two-dimensional nondivergent flow in barotropic atmosphere, *J. Meteor.*, 6 (1949), 105–122.
- [31] Rektorys K. a kol.: Přehled užití matematiky, SNTL, Praha, 1981.
- [32] Bjerknes, J., Solberg H.: Life cycle of cyclones and the polar front theory of atmospheric circulation. *Geophys. Publ.*, 3 (1922), 1–18.
- [33] Godske C. L., Bergeron T., BJERKNES J., BUNDGAARD R. C.: Dynamic meteorology and weather forecasting, AMS and Carnegie Institute in Washington, 1957.
- [34] Bjerknes J.: Compendium of meteorology, AMS, 1951.
- [35] Emanuel K. A.: Atmospheric convection, Oxford University Press.
- [36] Bluestein H. B.: Synoptic-dynamic meteorology in midlatitudes, Vol. II. Observation and theory of weather systems, Oxford University Press, 1993.
- [37] Emanuel K. A.: Symmetric instability, *In*: Lilly D. K., Gal-Chen T. (eds): Mesoscale meteorology – theories, observations and models, 217–229, D. Reidel Publishing Company, 1983
- [38] Gill A. E.: Atmosphere-ocean dynamics, Academic Press, 1982.
- [39] Dymnikov V. P., Filatov A. N.: Ustrojčivost' krupnomasštabnykh atmosferných procesov, Gidrometeoizdat, 1990.
- [40] Wiin-Nielsen A., Chen T.-C.: Fundamentals of atmospheric energetics, Oxford Univeristy Press, 1993.
- [41] Haltiner G. J., Martin F. L.: Dynamical and physical meteorology, McGraw-Hill Book Company, 1957.
- [42] Haltiner G. J., Williams R. T.: Numerical prediction and dynamic meteorology, 2. vyd. John Wiley & Sons, 1980.
- [43] Holton J. R.: An introduction to dynamic meteorology, 1. vyd., Academic Press, 1972.
- [44] Sobišek B. a kol.: Meteorologický slovník výkladový a terminologický, Academia, MŽP, Praha, 1993.
- [45] Bickley W. G.: The plane jet, *Phil. Mag.*, 23 (1937), 727–731.
- [46] Satoh M.: Atmospheric circulation dynamics and general circulation models, Springer, 2004.
- [47] Eady E. T.: Long waves and cyclone waves, *Tellus*, 1 (1949), 33–52.
- [48] Raidl A.: Teorie dynamické instability atmosféry s aplikacemi na numerický předpovědní model, diplomová práce, MFF UK, Praha, 1992.
- [49] Fantini M.: Linear baroclinic instability in the presence of heat inflow from the lower boundary, *Ann. Geophys.*, 13 (1995), 419–426.
- [50] Phillips N. A.: A simple three-dimensional model for the study of large-scale extratropical flow patterns, *J Meteor.*, 8 (1951), 381–394.
- [51] Sutcliffe, R. C.: Mean upper contour patterns of the Northern Hemisphere – The thermal-synoptic viewpoint. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 77 (1951), 435–440.

# ČÁST II



# ÚVOD

Dnes jsme svědky stále bouřlivějšího rozvoje matematického modelování jak v přírodních vědách, tak v inženýrské praxi. Zde všude jsou aplikovány metody soudobé nelineární mechaniky k řešení čtených úloh různého charakteru, formulovaných pro širokou paletu měřítek až k velkoprostorovým procesům včetně geofyzikální hydrodynamiky. Je příznačné, že v nelineární mechanice se setkáváme s řadou nových jevů, nevyskytujících se u lineárních systémů. Nelineární systémy mají často více než jedno stacionární řešení (stacionární řešení parciálních diferenciálních rovnic odpovídají rovnovážným stavům přiřazené obyčejné diferenciální rovnice v Banachově prostoru, resp. pevným bodů jejího semitoku), a možná je i existence oscilačních řešení typu limitních cyklů. Také se zde setkáváme s výskytem chaotických řešení a velmi často s kritickým chováním systémů v závislosti na jejich parametrech.

Nelineární analýza reprezentuje jeden z perspektivních oborů matematiky s kořeny v matematické analýze, i když zasahuje také do jiných matematických směrů a je v úzké interakci s fyzikálními disciplinami zahrnujícími i geofyziku a geofyzikální hydrodynamiku. V současné době se zaměřujeme na studium nelineárních jevů vznikajících pouze nelineárními interakcemi. Jako příklad lze uvést deterministický chaos.

Dokladem typických rysů řešení nelineárních problémů s množinou různých typů chování může být chování atmosféry. Její různé stavy bývají simulovány výsledky fyzikálních experimentů s reálnými tekutinami v rotujících nádobách, vystavených vnějšímu ohřevu. Při jistých kombinacích rychlosti rotace a teplotního kontrastu se objevují postupné vlny s konstantní amplitudou, poté vlny s periodicky se měnící amplitudou i formou a nakonec neregulární vlny s charakterem turbulence. Dochází k bifurkacím, v širším významu k různým kvalitativním změnám či metamorfózám objektů při změně parametrů, na nichž tyto objekty závisí. Je relevantní

poznámenat, že většina teoretických fyziků chová značný respekt ke svým experimentálním protějškům.

Nelineární analýza začíná chápat, že jisté matematické potíže při práci s dynamickými systémy jsou principiální a souvisí s exponenciální nestabilitou některých dynamických úloh. Tato vlastnost je pro existenci deterministického chaosu klíčově důležitá. Abychom popsali bohaté spektrum různých typů chování dynamických systémů a poznali specifickou rysu chování v rozmezí hodnot parametrů, je třeba použít numerických postupů. Vedle nezbytného analytického přístupu je základním pilířem užití matematiky v praxi počítač. Jestliže extrapolujeme na základě překotné rychlosti jeho současného vývoje, podle Hawkinga je docela dobře možné, že časem práci v teoretické fyzice zcela převezme. Je obtížné určit, kdy k tomu dojde, jisté však je, že v současnosti je jedním z hlavních směrů nelineární analýzy stále přetrvávající potřeba její geometrizace. O dalších směrech se zmíníme v závěru práce, kde nezapomínáme na významné úlohy teorie singularit (teorii bifurkace v sobě v jistém smyslu zahrnuje teorie katastrof a singularit).

Bezpochyby to je soudobá diferenciální geometrie, která rozpracovává a exploatuje z těsné vazby mezi geometrickými a analytickými pojmy i idejemi a stává se důležitým matematickým nástrojem teoretické fyziky. Zjednodušuje matematický formalismus a prohlubuje naše fyzikální chápání. Výsledky, jež diferenciální geometrie přináší, jsou relevantní jak pro matematiku, tak i fyziku s důsledky etablujícími vztahy mezi Lieovými grupami, jejich reprezentací a hydrodynamikou. Příklad takového vztahu zahrnuje problém řešení Eulerovy rovnice, popisující pohyb ideální homogenní tekutiny v trojdimenzionální oblasti  $D$ . Toto řešení lze interpretovat jako časovou závislost tečného vektoru geodetiky pravoinvariantní Riemannovy metriky (zadané kinetickou energií tekutiny) na grupě  $SDiff D$  zachovávajících objemy vzájemně jednoznačných zobrazení  $D \rightarrow D$ , hladkých spolu s inverzním zobrazením.

K renesanci geometrie vedle fyziky a fyzikálních prostorů dochází také v pohledu na podstatně abstraktnější prostory, s nimiž pracujeme např. v termodynamice, v Hamiltonově formalismu a rovněž v hydrodynamice. Zůstane-li u Hamiltonovy dynamiky, nejdůležitějším činitelem geometrického přístupu je diferenciální 2-forma ve fázovém prostoru systému, mající stejnou úlohu jako metrika na Riemannových varietách. Touto formou je vytvořen reverzibilní 1-1 vztah mezi vektory a diferenciálními 1-formami. V případě systému s  $n$  stupni volnosti má fázový prostor  $2n$  dimenzí a příslušná 2-forma je simplektickou formou a fázový prostor s touto formou je simplektickou varietou.

Snahy studovat kvalitativní změny v chování dynamických systémů při různých hodnotách jejich parametrů na konečnědimenzionálních modelech (hovoříme o redukci dimenze zkoumaného problému) v hydrodynamice nás přivedly k jisté třídě regulárních dynamických systémů, nazývaných systémy hydrodynamického typu (systems of the fluid mechanical type). Tím přecházíme do problematiky parciálních diferenciálních rovnic, úzce spjaté se studiem kapalin. Získané modely představují kvadraticky nelineární systémy obyčejných diferenciálních rovnic pro konečný soubor parametrů definujících stav systémů, které jsou lineárními funkcionaly pole rychlosti tekutiny. Samotné systémy zachovávají integrály pohybu výchozích prognostických rovnic hydrodynamiky. Regulárnost znamená, že divergence fázového toku těchto systémů je nulová.

Tyto systémy do hydrodynamiky zavedl Obuchov, blízký spolupracovník Kolmogorova, představitele ruské matematické školy, mající rozsáhlou tradici teoretické práce. Jeden z mnohých možných příkladů se týká poruchové teorie integrovatelných hamiltonovských systémů, jejichž fázový prostor se rozvrstňuje na invariantní anuloidy (tory). Pro analytický případ a pro systémy, jež jsou pouze hladké, se torus s nerezonanční frekvencí pod vlivem poruchy zachovává. Toto tvrzení není v rozporu s Peixotovým teorémem z topologické dynamiky, podle něhož nelze považovat kvaziperiodický pohyb na kompaktní dvojdimenzionální varietě za silně typickou vlastnost dynamických systémů. Hamiltonovy systémy jako celek jsou v jistém smyslu netypickými systémy v množině dynamických systémů a na ně působící malé poruchy nemohou být libovolné. Při jejich působení musí být zachován statut hamiltonovských systémů.

Druhý příklad zahrnuje problém turbulence, v němž se oba autoři osobně angažovali a podíleli se na metodických základech teorie homogenní a lokálně izotropní turbulence.

Nejjednodušším netriviálním systémem hydrodynamického typu je kanonický triplet, jehož pohybové rovnice závisí obecně na pěti parametrech. Tento triplet je vzorem tzv. symetrizovaného systému, který je ze třídy rovnic, jež jsou zobecněním rovnic Hamiltonovy dynamiky. Zároveň je kanonický triplet ukázkou objektu, který je ekvivalentní Eulerovým rovnicím rotujícího tuhého tělesa. Můžeme postoupit ještě dál a říci, že zajímavou třídou systémů hydrodynamického typu jsou Eulerovy rovnice popisující pohyb  $n$ -dimenzionálního tělesa. Jeho pohybové rovnice vytvářejí podsystemy (invariantní) konkrétních symetrizovaných systémů.

Vzpomeňme zde ještě jednoho aspektu, který nemusí být dosti silně vnímán: komplexní analogie pohybových rovnic  $n$ -dimenzionálního tuhého tělesa a stacionární Kortewegova de Vriesova rovnice (zapsaná v matico-



vém tvaru) náležejí stejné třídě. Tato rovnice se prvně objevila v teorii mělké vody a je příkladem tzv. skryté symetrie. Za jistých podmínek se při  $t \rightarrow \pm\infty$  řešení této rovnice „rozpadá“ na solitony. Jinými slovy, řešení této rovnice vykazuje chování solitonu. Jde o vysoce neobvyklou rovnici, protože solitony jsou v určitém ohledu jako lineární vlny a v jiném jako nelineární vlny. Poznamenejme, že tento jev vyvolal horečnou aktivitu, která podle Griffihse (v roce 1991 se stal 7. ředitelem Institutu pokročilých studií v Princetonu) dokonale předvedla jednotu matematiky. Jako příklad této aktivity lze zde uvést problém nalezení kuželu o daném objemu, ale nejmenším povrchu mezi všemi kužely. Na první pohled není zřejmé, že to má něco společného s vlnami v mělké vodě. Ukazuje se, že diferenciální rovnice, které popisují řešení, se chovají stejně jako solitony a rovnice popisující vlny v mělké vodě. Oba problémy, jeden z matematické fyziky a druhý z diferenciální geometrie, se vyznačují stejným, vysoce vzácným a zajímavým chováním solitonů.

V aplikacích geometrie na problémy hydrodynamiky přisuzujeme důležitou úlohu zobecněnému tuhému tělesu. Jeho konfiguračním prostorem je Lieova grupa, potenciální energie tělesa je nulová a kinetická energie zadává levo (či pravo) invariantní metriku na Lieově algebře Lieovy grupy.

Zajímá nás vazba zobecněného tuhého tělesa s mechanikou tekutin. Je zde třeba postupovat obezřetně. S rovnicemi hydrodynamiky jsou spojeny nekonečnědimenzionální grupy a ne všechny vlastnosti konečnědimenzionálních zobecněných těles mají hydrodynamické rovnice. Výsledky teoretických studií ukazují, že na konečnědimenzionálních Lieových grupách s jednostranně invariantní metrikou lze geodetiky této metriky prodloužit v čase na obě strany. Naproti tomu pro typické hladké počáteční pole rychlosti v oblasti  $D$  klasické řešení Eulerovy hydrodynamické rovnice existuje jen v konečném čase, závisujícím na počátečních datech. Odtud lze učinit závěr: téměř všechny geodetiky na grupě  $SDiff D$  (grupě difeomorfismů proudové oblasti  $D$ ) nelze neomezeně prodlužovat (tj. množina těch geodetik, které nemají tuto vlastnost, je množina nulová).

Mnohým zde naznačeným otázkám, však i vlastnostmi a obsahem příbuzným otázkám, a také možným souvislostem dotvářejícím rámeček pojednání o nelineárních systémech hydrodynamiky, věnujeme pozornost v druhé části knihy (kapitolách 2 až 13). Velkou měrou přitom vycházíme z výsledků teoretické školy soustředěné kolem Obuchova, žáka Kolmogorova. Závěry, k nimž tato škola ve spolupráci s matematikou v různých údobích dospěla, jsou relevantní jak pro fyziku, tak i matematiku a představují dlouhodobý zájem.

## 2 O SYSTÉMECH HYDRODYNAMICKÉHO TYPU

### 2.1 K definici systémů hydrodynamického typu

V mechanice tekutin se s kvadratickými nelineárními systémy, nazývanými systémy hydrodynamického typu, můžeme setkat tam, kde aplikujeme Galerkinovu metodu na výchozí kvadraticky nelineární rovnice dynamiky tekutin, na rovnice Navierovy-Stokesovy [1]. Tato metoda je založena na redukci původně nekonečnědimenzionálního systému na konečnědimenzionální podprostor fázového prostoru pohybující se tekutiny, nikoliv na redukci vztaženou na inerciální varietu. Jsou to však výsledky o existenci a hladkosti inerciálních variet, které činí smysluplnými snahy silně redukovat dimenzi zkoumaného problému, převést tak otázky o atraktoru evolučních parciálních diferenciálních rovnic na konečnědimenzionální dynamický systém<sup>\*)</sup>. Je to současná móda fraktálů, která se postupně stává fundamentální charakteristikou atraktorů těchto rovnic (citujeme podle [2]). V tomto ohledu jsou to problémy rozvětvení řešení pro rovnice i nerovnice, které v současné době se stále více zviditelňují při studiu asymptotického chování řešení dynamických systémů, kdy postupnou bifurkací přes zdvojování frekvence (period doubling bifurcation) dochází k chaotickému chování. Návaznost na stále zásadní problém turbulence je zřejmá (odkláníme se od chápání turbulence jako od statistického jevu a přikláníme se k deterministickému pojetí tohoto fenoménu). Jednou z příčin stálých obtíží zde je velikost Reynoldsova čísla, neboť pro velká tato čísla (velké

---

\*) Se zřetelem na textovou souvislost a také proto, že širší fyzikální veřejnosti pojem inerciální variety nemusí být znám, připomeňme si zde její definici. Mějme dán dynamický systém, kterým budeme rozumět jistý metrický prostor  $H$  a množinu operátorů  $\{S(t)\}; t \geq 0$  tvořící semigrupu operátorů. Dále mějme konečnědimenzionální lipschitzovskou varietu  $M$ . Tuto varietu nazvěme inerciální varietou dynamického systému (stručně inerciální varietou), jestliže platí: 1.  $M$  je pozitivně invariantní množina, tj. pro množinu  $A \subset H$  je  $S(t)A \subset A$  pro všechna  $t \geq 0$ ; 2.  $M$  exponenciálně přitahuje všechny trajektorie dynamického systému. To znamená, že pro každé  $u_0 \in H$  existují kladná čísla  $a, b$  taková, že  $\rho(S(t)u_0, M) \leq a \exp(-bt)$  pro všechna  $t \geq 0$ ;  $\rho(\cdot, \cdot)$  je metrika na  $H$ .

rychlosti, malé vazkosti) jsou kontinuální modely citlivé na typ interakce mezi částicemi tekutiny.

Galerkinova metoda je jednou z nejuniverzálnějších metod praktického řešení různých úloh matematické fyziky. Naznačme základní myšlenku této metody. Uvažujme separabilní Hilbertův prostor  $H$  a množinu  $M$  jeho prvků hustou v  $H$ . Platí-li pro některý prvek  $u$

$$(u, v) = 0 \text{ pro každé } v \in M,$$

pak odtud plyne  $u = 0$  v  $H$ . Budiž nyní

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots$$

nějaká báze v  $H$ . Jestliže  $(u, \varphi_k) = 0$  pro  $k = 1, 2, \dots$ , pak opět  $u = 0$  v  $H$ . Podle předpokladu je totiž  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  báze v  $H$ , takže množina  $N$  všech  $n$  prvků tvaru

$$\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k,$$

kde  $n$  je libovolné přirozené číslo a  $a_k$  jsou libovolná reálná čísla, je hustá v  $H$ . Protože platí  $(u, \varphi_k) = 0$  pro každé  $k$ , platí také pro každý prvek uvedeného tvaru množiny  $N$

$$\left( u, \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right) = 0,$$

odkud plyne, že  $(u, \varphi_k) = 0$  pro  $k = 1, 2, \dots$ , a tedy  $u = 0$  v  $H$ .

Nechť v  $H$  je dána rovnice

$$Au = f,$$

kde  $A$  je operátor (může být velmi obecný) a  $f \in H$ . Najdeme-li takové  $u_0 \in D_A$  ( $D_A$  je definiční obor operátoru  $A$ ), že platí  $(Au_0 - f, \varphi_k) = 0$  pro každé  $k = 1, 2, \dots$ , pak je  $Au_0 - f = 0$  v  $H$ , takže  $u_0 \in D_A$  je řešením rovnice  $Au = f$  v  $H$ .

Ještě předpokládejme, že báze  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , a definiční obor  $D_A$  operátoru  $A$  jsou takové, že každá lineární kombinace  $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$  prvků této báze patří do  $D_A$ , a hledejme přibližné řešení  $u_k$  rovnice  $Au = f$  ve tvaru

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k,$$

kde  $n$  je libovolné, ale pevně zvolené přirozené číslo a  $a_k$  jsou zatím neznámé konstanty, které určíme z podmínky

$$(Au_n - f, \varphi_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

analogické podmínce  $(Au_0 - f, \varphi_k) = 0$  pro každé  $k = 1, 2, \dots$ . Především podmínka představuje  $n$  rovnic pro  $n$  neznámých konstant  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Ještě si uveďme, že v případě, kdy operátor  $A$  je lineární, tato podmínka nabude tvaru

$$(a_1 A \varphi_1 + a_2 A \varphi_2 + \dots + a_n A \varphi_n - f, \varphi_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Posloupnost  $u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$  s konstantními  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , jednoznačně

určenými podmínkou  $(Au_n - f, \varphi_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$ , konverguje v  $H_A$  (také v  $H$ ) k zobecněnému řešení  $u_0$  rovnice  $Au = f$ .

Aplikujme Galerkinovu metodu na úlohu o pohybu nestlačitelné homogenní tekutiny v ohraničené oblasti  $D$  trojdimenzionálního Euklidova prostoru:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + L(\mathbf{v}) &\equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = \rho^{-1} \nabla p + \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \quad \mathbf{v}|_S = 0, \quad \mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Zde je  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  pole rychlosti,  $\nu$  je kinematická vazkost,  $\rho$  hustota tekutiny,  $p$  tlak určený, jako obvykle, z podmínky nestlačitelnosti,  $\mathbf{f}$  vnější síla s  $S$  okraj (hranice) proudové oblasti  $D$ .

Řešení této úlohy ve tvaru

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x}),$$

kde je  $\{\boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x})\}$  úplný systém ortonormálních vlastních vektorových funkcí lineární okrajové úlohy

$$\begin{aligned} \nu \Delta \boldsymbol{\varphi}_k &= \mu_k \boldsymbol{\varphi}_k + \nabla p_k, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_k &= 0, \quad \boldsymbol{\varphi}_k|_S = 0, \end{aligned}$$

vyhovující normovací podmínce

$$\int_D \boldsymbol{\varphi}_k^2 d^3 \mathbf{x} = 1.$$

Po dosazení výrazu pro  $\mathbf{v}_n$  do výše uvedených pohybových rovnic, skalárním vynásobením  $\boldsymbol{\varphi}_m$  a integrací dospíváme ke vztahu

$$\dot{a}_k + \int_D \left( L \left( \sum_{l=1}^n a_l(t) \boldsymbol{\varphi}_l(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x}) \right) \right) d^3 \mathbf{x} = \int_D (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_k) d^3 \mathbf{x}.$$

Člen odpovídající tlakovým silám zde nevystupuje, neboť

$$\int_D (\nabla p, \boldsymbol{\varphi}_k) d^3 \mathbf{x} = \oint_S p(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varphi}_k) d\sigma = 0,$$

kde je  $\mathbf{n}$  jednotkový vektor ve směru normály k okraji  $S$  oblasti  $D$  a  $d\sigma$  je element integrační křivky  $S$ .

Získaný systém rovnic pro neznámé  $a_k$  je ekvivalentní galerkinovskému systému obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \dot{a}_k &= - \sum_{l,m=1}^n \gamma_{klm} a_l a_m - \nu \mu_k a_k + f_k, \\ &k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

kde

$$\gamma_{klm} = \int_D (\boldsymbol{\varphi}_k, (\boldsymbol{\varphi}_l, \nabla) \boldsymbol{\varphi}_m) d^3 \mathbf{x}$$

a dále

$$f_k = \int_D (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_k) d^3 \mathbf{x}.$$

K systému těchto rovnic připojíme počáteční podmínky

$$a_k(0) \equiv a_k^0 = \int_D (\alpha(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x})) d^3 \mathbf{x}.$$

Povšimněme si, že  $\sum_{k,l,m} \gamma_{klm} a_k a_l a_m = 0$ . Tento zápis vyjadřuje zákon zachování kinetické energie neviské tekutiny ( $\nu = 0$ ) při  $\mathbf{f} = 0$ , tj.

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho v_n^2 d^3 \mathbf{x} = \rho \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n a_k^2 = 0.$$

Zdůrazňujeme, že Galerkinova metoda se zakládá na redukci systému na konečnědimenzionální podprostor. Může poskytnou principiálně správné výsledky (pro velké časy), pokud je inerciální varieta v tomto podprostoru obsažena. Tento předpoklad však obecně splněn není a v takovém případě jsme určitou část inerciální variety „ztratili“. Může být ovšem pravda, že tato ztracená část inerciální variety je v určitém smyslu malá, a že většina fázových trajektorií vyšetřovaného systému skončí v té části inerciální variety, kterou máme obsaženou v uvažovaném podprostoru a že se z tohoto prostoru již nikdy nedostanou, nebo nanejvýš na „krátkou“ dobu. Může tedy nastat situace, že pro většinu fázových trajektorií (nebo trajektorie, které nás zajímají) jsme neztratili nic a potom dává Galerkinova metoda dobré výsledky.

Vraťme se k redukcím nekonečnědimenzionálních systémů na systémy konečnědimenzionální. Lee [3] ukázal, že při aproximaci rovnic hydrodynamiky Fourierovými řadami je splněn Liouvilleův teorém, podle něhož právě mikrokantické rozdělení zůstává v čase konstantní, necháme-li všechny systémy (rovnoměrně rozložené po tenké slupce mezi dvěma plochami konstantní energie ve fázovém prostoru) vyvíjet se podle Hamiltonových kanonických rovnic. V podstatě tato podmínka vede k jisté třídě dynamických systémů a to invariantním způsobem, tj. nezávisle na volbě souřadnicového systému. Přesněji, nové rovnice s transformovanými proměnnými jsou téhož tvaru jako rovnice původní s původními proměnnými a proto jsou kovariantní. Kovariance rovnic umožňuje zapisovat je bez explicitního vyjádření souřadnicové soustavy. Požadavek, aby rovnice byly kovariantní, má kromě toho velký význam heuristický, neboť omezuje rozmanitost tvarů a ponechává tak zvolit jejich správné tvary.

V mechanice tekutin redukce dimenze zkoumaného problému vyústí do třídy galerkinovských rovnic, obyčejných diferenciálních rovnic, splňujících následující podmínky:

1. Fázovým prostorem těchto systémů je lineární  $n$ -dimenzionální vektorový prostor (existuje  $n$  lineárně nezávislých vektorů, tj. existuje báze);
2. Pohybové rovnice těchto systémů jsou kvadraticky nelineární, stejně jako Navierova-Stokesova rovnice;
3. Existuje alespoň jeden (až na konstantu) kvadraticky pozitivně definitní integrál pohybu, pozitivně definitní kvadratická forma (energie), v dané bázi vyjádřená vzorcem (používáme Einsteinovo sumační pravidlo)  $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = a_{ik}\xi_i\xi_k > 0$ , kde  $a_{ik} = a_{ki}$ ,  $i, k = 1, 2, \dots, n$ , závisí na volbě báze a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  jsou souřadnice vektoru  $\mathbf{x}$  v této bázi.

Poznámka 1: integrály pohybu (první integrály, jednoduše integrály) systémů diferenciálních rovnic jsou funkce, které zůstávají konstantní podél libovolného daného řešení systému, přičemž konstanta závisí na řešení. Jinými slovy, integrály svazují proměnné systému, takže každý skalární integrál by umožnil snížení dimenze o jedničku. Takováto redukce může přirozeně nastat pouze tehdy, je-li integrál algebraickou, nepřiliš komplikovanou funkcí vzhledem ke svým proměnným, takže jedna z nich může být vyjádřena jako funkce zbývajících. Pokud je integrál transcendentní, je jakýkoliv pokus získat takovýto výraz beznadějný. Pro poučení uveďme, že problém  $n$  těles má 10 nezávislých algebraických prvních integrálů a že neexistují žádné integrály – závislé na čase, poloze a rychlostech pouze algebraicky – kromě těchto známých 10. Odtud plyne důležitý závěr, že je nemožné řešit pohybové rovnice problému  $n$  těles redukcí dimenze systému pomocí prvních integrálů.

Jestliže nyní označíme  $u^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , složky vektoru charakterizujícího stav systému hydrodynamického typu, pak lze jeho pohybové rovnice zapsat ve tvaru

$$\dot{u}^i = \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i u^j u^k, \quad (2.1)$$

jsou-li splněny požadavky zachování energie  $2E = g_{ik} u^i u^k$  ( $\dot{E} = 0$ ) a zachování fázového objemu (regularity)  $\partial \dot{u}^i / \partial u^i = 0$ . V (2.1) jsou  $\Gamma_{jk}^i$  „koeficienty interakce“, tvořící tenzor 3. řádu symetrický v dolních indexech a  $g_{ik}$  souřadnice dvakrát kovariantního tenzoru 2. řádu, tj. kovariantního metrického tenzoru. Z požadavku  $\dot{E} = 0$  a platnosti  $\partial \dot{u}^i / \partial u^i = \Gamma_{jk}^i u^k \equiv 0$ , dospíváme ke vztahům

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj}, \quad (2.2)$$

kde  $\Gamma_{ijk} = g_{i\alpha} \Gamma_{jk}^\alpha$  a dále

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jki} + \Gamma_{kij} = 0; \quad \Gamma_{ij} = 0. \quad (2.3)$$

Pro regulární systémy kovariantní vektor  $\gamma_k = \Gamma_{ik}^i = 0$ . Podmínka regularity je úzce spojena s důležitou statistickou vlastností, s invariancí kanonického rozdělení

$$f(u) = C \exp(-E/\theta),$$

kde je  $C$  konstanta a  $\theta$  analogie teploty. Pro regulární systémy se toto rozdělení, popisující „bílý šum“, v čase zachovává. Platí i opačné tvrzení. Nechť v počátečním časovém okamžiku  $\langle u^i \rangle = 0$ ,  $\langle u^i u^k \rangle = \theta \delta^{ik}$ , kde je  $\langle \rangle$  časová střední hodnota. Na základě pohybové rovnice (2.1) a cyklického vztahu (2.3) dostáváme

$$\langle \dot{u}_i \rangle |_{t=0} = \frac{1}{2} \theta \Gamma_{ijk} g^{jk} = -\frac{1}{2} \theta (\Gamma_{jki} + \Gamma_{kij}) g^{jk} = -\theta \gamma_i.$$

Můžeme tedy říci, že regulární systémy, a jen tyto systémy, nejsou „schopny detekovat bílý šum“. V jisté míře to odpovídá druhému principu termodynamiky a jeho statistické interpretaci.

Povšimněme si, že (2.2), (2.3) představující lineární zápisy v příslušných koeficientech, mají tenzorový charakter a proto platí v libovolném ortogonálním souřadnicovém systému. Dospěli jsme k nim z požadavku zachování energie ( $\dot{E} = 0$ ). Užitím aparátu teorie grup [4] se můžeme přesvědčit, že tyto zápisy jsou, volně řečeno, maximálním systémem podmínek tohoto druhu a nelze je dále již rozšířit. K dosažení tohoto cíle je třeba přihlédnout ke speciální oblasti teorie grup, k teorii reprezentací, což nyní učiníme.

Nechť  $G$  je grupa a  $n$  nějaké přirozené číslo. Potom každý homeomorfismus  $\mathbf{T}$  grupy  $G$  do grupy regulárních čtvercových matic řádu  $n$  nad tělesem komplexních čísel nazveme reprezentací grupy  $G$  maticemi. Zadat reprezentaci grupy  $G$  maticemi znamená přiřadit ke každému prvku  $g$  z  $G$  regulární matici  $\mathbf{M}(g)$  řádu  $n$  takovou, že  $\mathbf{M}(g_1 g_2) = \mathbf{M}(g_1) \mathbf{M}(g_2)$  pro libovolné dva prvky  $g_1, g_2 \in G$ . Je-li  $n$  přirozené číslo, potom regulární čtvercové matice řádu  $n$  nad tělesem komplexních čísel tvoří grupu vzhledem k maticovému násobení.

Nechť  $\{\mathbf{T}(g)\}_{g \in G}$  je reprezentace grupy  $G$  regulárními lineárními operátory  $n$ -dimenzionálního prostoru  $L$ . Nechť  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  je báze v  $L$  a  $\mathbf{T}(g)$  matice zobrazení  $\mathbf{T}(g)$  v této bázi. Potom  $\{\mathbf{T}(g)\}_{g \in G}$  je reprezentace grupy  $G$  maticemi, kterou nazvěme reprezentací indukovanou reprezentací  $\{\mathbf{T}(g)\}_{g \in G}$ .

Je-li dána reprezentace grupy  $G$  maticemi  $\{\mathbf{T}(g)\}_{g \in G}$  řádu  $n$  a dán nějaký  $n$ -dimenzionální vektorový prostor  $L$  s bází  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  a pomocí matice  $\mathbf{T}(g) = (T(g))_{ik}$  definovaný lineární operátor  $\mathbf{T}(g)\mathbf{e}_i = T_{ji}(g) \mathbf{e}_j$  a  $\mathbf{T}(g)(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) = x_1 \mathbf{T}(g)\mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{T}(g)\mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{T}(g)\mathbf{e}_n$ , takto získané operátory  $\mathbf{T}(g)$  tvoří reprezentaci grupy  $G$  lineárními operátory v prostoru  $L$ . Opět říkáme, že to je reprezentace indukovaná reprezentací  $\{\mathbf{T}(g)\}_{g \in G}$ .

Nechť  $\{\mathbf{T}_j\}_{j \in \mathcal{J}}$  je systém lineárních operátorů v  $L$  indukovaný prvky z jisté množiny  $\mathcal{J}$  a  $L' \subset L$ . Řekněme, že  $L'$  je invariantní podprostor vzhledem k  $\{\mathbf{T}_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ , když  $\mathbf{T}_j(L') \subset L'$  pro každé  $j \in \mathcal{J}$ . Je-li  $L'$  invariantní podprostor vzhledem k  $\{\mathbf{T}_j\}_{j \in \mathcal{J}}$  a neobsahuje-li  $L'$  žádné vlastní podprostory (tj. různé od  $\{0\}$  a  $L'$ ) invariantní vzhledem k  $\{\mathbf{T}_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ , nazýváme  $L'$  ireducibilním invariantním podprostorem vzhledem k  $\{\mathbf{T}_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ . Jsou-li  $\{0\}$  a  $L$



jedinými invariantními podprostory vzhledem k  $\{\mathbf{T}_j\}_{j \in \mathcal{J}}$  nazveme systém  $\{\mathbf{T}_j\}_{j \in \mathcal{J}}$  ireducibilním.

Poznamenejme, že zejména konečnědimenzionální invariantní podprostory jsou stavebními kameny pro popis reprezentací a jen takovými podprostory se zde budeme zabývat.

Je-li  $\{\mathbf{T}(g)\}_{g \in G}$  reprezentace grupy  $G$  na reprezentačním prostoru  $L$  a je-li  $L'$  podprostor v  $L$  invariantní vzhledem k  $\{\mathbf{T}(g)\}_{g \in G}$ , máme na  $L'$  dānu reprezentaci grupy  $G$  tím, že každý operátor  $\mathbf{T}(g)$  definuje lineární operátor prostoru  $L'$ . Budeme ji nazývat reprezentací vynucenou na  $L'$  reprezentací  $\{\mathbf{T}(g)\}_{g \in G}$ .

Aplikujme nyní věty o reprezentaci grup na tenzory 3. řādu tvořící lineární prostor  $\mathcal{F}$  a ukaŹme, že (2.3) vskutku je maximálním systēmem podmínek pro „koeficienty interakce“ – tenzory 3. řādu. Tomuto počínu však bude předcházet řāda přípravných úvah.

Nechť  $f_{ijk}$  jsou složky tenzoru 3. řādu  $f$  a budiŹ  $\mathcal{F}$  lineární podprostor těchto tenzorů s definovaným skalárním součinem (tenzorem nultého řādu)  $(f, g) = f_{ijk}g_{ijk}$  pro  $f, g$  z  $\mathcal{F}$ . Každé ortogonální transformaci  $n$ -dimenzionálního prostoru s maticí transformace  $\mathbf{A} = (a_{i\alpha})$  odpovídā ortogonální transformace v prostoru tenzorů  $\mathcal{F}$ :

$$f'_{ijk} = a_{i\alpha}a_{j\beta}a_{k\gamma}f_{\alpha\beta\gamma}. \quad (2.4)$$

Vztah (2.4) přepíšeme do tvaru s direktním součinem tří matic

$$f'_{ijk} = [\mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}]_{ijk, \alpha\beta\gamma} f_{\alpha\beta\gamma}.$$

Jde o reprezentaci grupy v prostoru tenzorů (reprezentaci ve složkách tenzoru  $f$  3. řādu).

Abychom zdůraznili, že jde o direktní součín tří matic  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}$ , místo  $\mathbf{T}(g)f_{ijk} = f'_{ijk}$  píšeme  $\mathbf{T}_1^{(3)}(g)$ . JestliŹe matici  $\mathbf{A}$  přísluší operátor  $\mathbf{T}_1^{(3)}(g)$  a matici  $\mathbf{B}$  operátor  $\mathbf{T}_2^{(3)}(g)$ , součínu matic  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{B})$ , který tvoří opět reprezentaci grupy matic, odpovídā součín  $\mathbf{T}_1^{(3)}(g)\mathbf{T}_2^{(3)}(g) = (\mathbf{T}_1(g)\mathbf{T}_2(g))^{(3)}$ .

V prostoru  $\mathcal{F}$  leŹí lineární podprostor s vlastností: jestliŹe tenzor  $f$  leŹí v tomto podprostoru, pak rovněž tenzor  $\mathbf{T}_1^{(3)}(g)f$  je z tohoto podprostoru. Takový podprostor je invariantním podprostorem. Tvoří ho rovněž podprostor tenzorů symetrických ve všech jejich indexech. ProtoŹe v našem případě  $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik} = \Gamma_{ikj}$ , také tyto tenzory tvoří lineární invariantní podprostor, jehoŹ prvky nazveme tenzory systēmů hydrodynamického typu. Jejich podprostor je částí dalšího podprostoru tenzorů, jejichŹ čtvercové

matice mají nulové stopy:  $f_{iik} = f_{iji} = f_{ijj} = 0$ . Ukazují na to vztahy (2.2), (2.3):  $f_{iji} = f_{ijj} = 0$ ,  $f_{ijj} = -f_{jij} - f_{jji} = 0$ . Podprostor tenzorů matice jejichž koeficienty mají nulové stopy označme  $\mathcal{F}_0$ . Tento podprostor je invariantním podprostorem, neboť  $\mathbf{T}(\mathbf{g})f_{iik} = f'_{iik} = a_{i\alpha} a_{i\beta} a_{k\gamma} f_{\alpha\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta} a_{k\gamma} f_{\alpha\beta\gamma} = a_{k\gamma} f_{\alpha\beta\gamma} = 0$ , jak vyplývá z vlastností ortogonálních matic.

Jestliže  $\mathcal{F}_2$  je invariantní podprostor invariantního prostoru  $\mathcal{F}_1$ , tenzory z  $\mathcal{F}_1$  ortogonální k tenzorům z  $\mathcal{F}_2$  rovněž tvoří invariantní podprostor  $\mathcal{F}_3$  a podprostor  $\mathcal{F}_1$  je direktním součtem podprostorů  $\mathcal{F}_2$  a  $\mathcal{F}_3$ , tedy  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3$ . Je tak zřejmé z toho, že  $\mathbf{T}_1^{(3)}(\mathbf{g})$  zachovává skalární součin a následně i ortogonalitu tenzorů. Pokud bude jeden z podprostorů  $\mathcal{F}_2$ ,  $\mathcal{F}_3$  reducibilním podprostorem, lze ho rozložit. Opakováním tohoto postupu nakonec rozložíme celý prostor  $\mathcal{F}$ , lineární podprostor tenzorů 3. řádu, na ortogonální součet dále již ireducibilních podprostorů, neobsahujících žádné vlastní podprostory (tj. různé od  $\{0\}$  a  $\mathcal{F}$ ) invariantní vzhledem k  $\mathbf{T}_1^{(3)}(\mathbf{g})$ . Nyní již můžeme vyslovit

**Teorém 1.** Podprostor tenzorů systémů hydrodynamického typu prostoru tenzorů 3. řádu je ireducibilní invariantní podprostor vzhledem k  $\mathbf{T}_1^{(3)}(\mathbf{g})$ .

Důkaz tohoto pro nás základního teorému budeme provádět po etapách, označených číslicemi 1 až 3.

1. Zavedeme podprostor tenzorů speciálního tvaru [5]

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \{ \delta_{ij} f_k - p(\delta_{ij} f_k + \delta_{jk} f_i + \delta_{ki} f_j) \}, \\ \mathcal{F}_2 &= \{ \delta_{jk} f_i - p(\delta_{ij} f_k + \delta_{jk} f_i + \delta_{ki} f_j) \}, \\ \mathcal{F}_3 &= \{ \delta_{ki} f_j - p(\delta_{ij} f_k + \delta_{jk} f_i + \delta_{ki} f_j) \},\end{aligned}\tag{2.5}$$

kde je  $\delta_{ij}$  Kroneckerův symbol,  $f_i$  vektor  $n$ -dimenzionálního prostoru a konstanta  $p$  je vybrána tak, aby  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$ ,  $\mathcal{F}_3$  byly po dvojicích ortogonální podprostory:

$$\begin{aligned}(\delta_{ij} f_k - p(\delta_{ij} f_k + \delta_{jk} f_i + \delta_{ki} f_j)) (\delta_{jk} g_i - p(\delta_{ij} g_k + \delta_{jk} g_i + \delta_{ki} g_j)) &= f_k g_k - p(n f_k g_k + \\ + f_k g_k + f_k g_k - p(f_k g_k + n f_k g_k + f_k g_k) + p^2(3 n f_k g_k + 6 f_k g_k)) &= f_k g_k (1 - 2(n + 2)p + \\ + 3(n + 2)p^2) = 0 \text{ atd.}\end{aligned}$$

Pak bude  $p^{-1} = n + 2 \pm (n^2 + n - 2)^{1/2}$ . Tyto podprostory jsou invariantní podprostory:

$$a_{i\alpha} a_{i\beta} a_{k\gamma} (\delta_{\alpha\beta} f_\gamma - p(\delta_{\alpha\beta} f_\gamma + \delta_{\beta\gamma} f_\alpha + \delta_{\gamma\alpha} f_\beta)) = \delta_{ij} f'_k - p(\delta_{ij} f'_k + \delta_{jk} f'_i + \delta_{ki} f'_j),$$

kde  $f'_i = a_{i\alpha} f_\alpha$ . Tím je vytvořen mezi námi zavedenými tenzory speciálního tvaru a vektory  $f_i$  lineární vzájemně jednoznačný vztah takový, že jestliže

tenzoru  $f_{ijk}$  odpovídá vektor  $f_i$ , pak  $\mathbf{T}_1^{(3)}f_{ijk}$  odpovídá  $\mathbf{A}f_i$ . V podprostorech  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$  reprezentace je ekvivalentní reprezentaci grupy ortogonálními maticemi ve svém vlastním  $n$ -dimenzionálním prostoru. Odtud vyplývá ireducibilita těchto podprostorů. Uvážíme-li např. podprostor  $\mathcal{F}_1$  a je-li  $\varphi$  regulární lineární zobrazení  $\mathcal{F}_1$  na  $n$ -dimenzionální podprostor  $\mathcal{F}_1$  s ortogonálními maticemi,  $\{\mathbf{T}(g)\}_{g \in G}$  reprezentace grupy  $G$  na  $\mathcal{F}_1$ , potom  $\{\varphi\mathbf{T}(g)\}_{g \in G}$  je reprezentace grupy  $G$  na  $\mathcal{F}_1$ , a to je reprezentace ekvivalentní k reprezentaci  $\{\mathbf{T}(g)\}_{g \in G}$ .

Podprostory  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$  jsou ortogonální k podprostoru  $\mathcal{F}_0$ , neboť konvoluce tenzoru, jehož matice má nulovou stopu, s tenzorem  $\delta_{ij}$  je vždy nulová. Dimenze podprostoru  $\mathcal{F}_0$  je  $n^3 - 3n$ . Platí:

Teorém 2. Prostor tenzorů 3. řádu lze psát ve tvaru ortogonálního součtu invariantních podprostorů  $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  a  $\mathcal{F}_3$ , tedy

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_3,$$

kde  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  a  $\mathcal{F}_3$  jsou ireducibilní podprostory. Zbývá rozložit  $\mathcal{F}_0$  na ireducibilní složky.

2. Každému invariantnímu podprostoru lze přiřadit ortoprojektor  $\mathbf{P}$ , zobrazující tento podprostor na týž podprostor.  $\mathbf{P}$  zachovává invariantnost prvků podprostoru, tedy platí  $\mathbf{P}^2a = \mathbf{P}(\mathbf{P}a) = \mathbf{P}b = b$ , nebo-li  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ , kde  $a$  je prvek z tohoto podprostoru a  $b = \mathbf{P}a$ . Z invariance podprostoru vyplývá možnost záměny (permutace)  $\mathbf{P}$  se všemi  $\mathbf{T}_1^{(3)}$ , tj.  $\mathbf{P}\mathbf{T}_1^{(3)}(g) = \mathbf{T}_1^{(3)}(g)\mathbf{P}$ . Stačí přesvědčit se o platnosti tohoto vztahu pro tenzory podprostoru a jeho ortogonálního doplňku. Obráceně, každý symetrický operátor s vlastností  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$  a permutující se všemi  $\mathbf{T}_1^{(3)}(g)$ , určuje invariantní podprostor těch tenzorů  $a$ , pro něž  $\mathbf{P}a = a$ . Jestliže invariantní podprostor je ortogonálním součtem dvou druhých podprostorů, pro příslušné projektory lze psát  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = 0$ . Vyslovme:

Lemma. Libovolný lineární operátor permutující v podprostoru  $\mathcal{F}_0$  se všemi ortogonálními transformacemi  $\mathbf{T}_1^{(3)}(g)$  je lineární kombinací jednodušších operátorů splňující předchozí vztahy. Tato vlastnost implikuje symetričnost operátorů vzhledem k definovanému skalárnímu součinu.

Důkaz tohoto lemmatu se opírá o teorii ortogonálních invariantů. Ortogonálním (polynomickým) invariantem nazýváme polynom tvořený souřadnicemi systému vektorů  $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$ , který je invariantní vzhledem k záměně souřadnic těchto vektorů souřadnicemi vektorů  $\mathbf{A}\mathbf{f}, \mathbf{A}\mathbf{g}, \mathbf{A}\mathbf{h}$ , kde je  $\mathbf{A}$  libovolná ortogonální matice. Také lze říci, že ortogonální invarianty jsou

výrazy, jejichž hodnota se nemění při jakékoliv transformaci jedné kartézské soustavy souřadnic v jinou soustavu souřadnic.

Poznámka 2: nezapomínejme, že při obecné ortogonální transformaci  $x'_i = a_{ij}x_j + c'_i$  se souřadnice nechovají jako složky vektoru a tedy složkami vektoru nejsou. Jde-li však o transformaci, při níž počátky obou kartézských soustav splývají, pak z transformačního vzorce  $x'_i = a_{ij}x_j$  je vidět, že se souřadnice transformují stejným způsobem jako složky vektoru. Proto se v tomto a jenom v tomto případě chovají kartézské souřadnice jako složky vektoru.

Základní teorém teorie ortogonálních invariantů vyslovíme ve znění:

**Teorém 3.** Libovolný polynomický invariant vektorů  $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$  lze zapsat ve tvaru polynomu z dvojic skalárních součinů těchto vektorů. Skalární součiny tedy tvoří bázi systému invariantů. Také lze říci, že libovolný tenzor konstantní ve všech souřadnicových systémech je lineární kombinací tenzorů  $\delta_{ij}$ .

Abychom tento teorém dokázali, necht' je  $p_{ijkl}$  takový tenzor. Výsledkem operace  $p_{ijkl}f_i g_j h_k r_l$  je skalár. Protože tenzor  $p$  se nemění při transformaci, je invariantem. To značí, že jej můžeme zapsat ve tvaru součtu členů  $c(f_i h_i)(g_j r_j)$ . Protože vektory  $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{r}$  jsou libovolné, značí to, že  $p_{ijkl}$  je součtem členů tvaru  $c \delta_{ik} \delta_{jl} \dots$

Vraťme se k důkazu dříve vysloveného lemmatu. Budiž nyní  $\mathbf{T}$  lineární transformace záměnná se všemi  $\mathbf{T}_1^{(3)}(\mathbf{g})$ . Pro její matici  $(t_{ijk, \alpha\beta\gamma})$  dostáváme

$$t_{ijk, \alpha\beta\gamma} a_{\alpha r} a_{\beta s} a_{\gamma l} = a_{i\alpha} a_{j\beta} a_{k\gamma} a_{mr} a_{ns} a_{pl} t_{\alpha\beta\gamma, rst},$$

nebo

$$t_{ijk, mnp} = a_{i\alpha} a_{j\beta} a_{k\gamma} a_{mr} a_{ns} a_{pl} t_{\alpha\beta\gamma, rst}.$$

Je tedy zřejmé, že  $t_{ijk, mnp}$  je tenzor, který lze zapsat jako součet členů tvaru  $c \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{np}$ . Protože uvažujeme toliko tenzory, jejichž složky tvoří matice s nulovým součtem jejich prvků na hlavní diagonále, pak v případě kdy se v  $c \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{np}$  vyskytuje  $\delta$  s indexy z jedné skupiny, např.  $\delta_{np}$ , působením takové matice na tenzor dostáváme nulový prvek. V úvahu tedy nadále připadají jen sčítanci typu  $c \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kp}$  atp. Působení matice na tenzor nás přivádí k permutaci jeho indexů:  $f'_{ijk} = \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kp} f_{mnp} = f_{jik}$ . Symetričnost takového operátoru je evidentní, neboť  $(\mathbf{T}\mathbf{f}, \mathbf{g}) = f_{jik} g_{ijk} = f_{ijk} g_{jik} = (\mathbf{f}, \mathbf{T}\mathbf{g})$ . Tím je lemma dokázáno.

3. Než pokročíme dále, zastavme se u grupy, pro niž používáme název permutace. Necht'  $\mathcal{A}$  je množina a  $\mathcal{S}$  množina všech bijektivních zobrazení množiny  $\mathcal{A}$  do sebe. Jsou-li  $\varphi$  a  $\psi$  dva prvky z  $\mathcal{S}$ , definujeme  $\varphi \cdot \psi$  jako zobrazení množiny  $\mathcal{A}$  do sebe dané vzorcem  $[\varphi \cdot \psi](a) = \varphi[\psi(a)]$  pro každé

$a \in \mathcal{A}$ . Zobrazení  $\varphi \cdot \psi$  nazýváme složení  $\varphi$  po  $\psi$ . Toto zobrazení je opět bijekce  $\mathcal{A}$  na  $\mathcal{A}$  a  $(\mathcal{S}, \cdot)$  tvoří grupu. Označme prvky množiny  $\mathcal{A}$  jako  $1, 2, \dots, n$ . Je-li  $\varphi \in \mathcal{S}$  a klademe-li  $a_i = \varphi(i)$  pro  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , popisujeme  $\varphi$  schématem

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ a_1, & a_2, & \dots, & a_n \end{pmatrix}.$$

Položme  $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$  a uvažujme

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 1', & 2', & 3' \end{pmatrix}.$$

Mezi prvky  $1', 2', 3'$  se vyskytuje každý z prvků  $1, 2, 3$  právě jednou;  $1', 2', 3'$  je jisté pořadí čísel  $1, 2, 3$ . Připomeňme si zde pravidlo o násobení permutací: Je-li

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 1, & 3, & 2 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 1 \end{pmatrix},$$

platí

$$\varphi \cdot \psi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 3 \end{pmatrix}.$$

Tohoto pravidla použijeme později. Každé permutaci  $\varphi$  odpovídá lineární operátor v prostoru tenzorů  $\mathcal{F}$  (nebo  $\mathcal{F}_0$ ), který označíme  $\bar{\varphi}$ . Zápis  $f' = \bar{\varphi} f$  značí, že každá složka tenzoru  $f'$  je rovna některé složce tenzoru  $f$  se stejnými indexy, avšak v pořadí daném permutací. Jmenovitě  $f'_{i_1 i_2 i_3} = f_{i'_1 i'_2 i'_3}$ . Například pro  $\varphi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 1 \end{pmatrix}$  máme  $f'_{123} = f_{231}, f'_{312} = f_{123}$  atd. Pro operaci  $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$  platí  $\overline{\varphi_1 \varphi_2} = \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2$  a je tedy  $\bar{\varphi}$  reprezentací grupy  $S_3$  lineárními operátory v prostoru tenzorů.

Zaměříme dále pozornost na formální lineární kombinaci

$$a = \sum_{\varphi} a(\varphi) \varphi. \quad (2.6)$$

Kombinace (2.6) lze člen po členu sčítat a násobit reálným číslem, tj. tyto kombinace tvoří vektorový prostor s bází, kterou jsou prvky grupy, tedy

$3! = 6$ ti dimenzionální prostor. Také je lze násobit jako polynomy podle zákonů násobení prvků grupy:

$$ab = \sum_{\varphi} a(\varphi)\varphi \sum_{\tilde{\varphi}} b(\tilde{\varphi})\tilde{\varphi} = \sum_{\varphi\tilde{\varphi}} a(\varphi)b(\tilde{\varphi})\varphi\tilde{\varphi} = \sum_{\varphi} \left( \sum_{\tilde{\varphi}} a(\varphi\tilde{\varphi}^{-1})b(\tilde{\varphi}) \right) \varphi.$$

Tedy o tomto vektorovém prostoru mluvíme jako o algebře, o grupové algebře  $\mathfrak{A}$ . Algebra je dána lineárními operátory v prostoru tenzorů

$$a = \sum_{\varphi} a(\varphi)\varphi \rightarrow \bar{a} = \sum_{\varphi} a(\varphi)\bar{\varphi}. \quad (2.7)$$

Zápis (2.7) je lineární zobrazení, při němž součtu, násobení číslem a součinu dvou prvků grupové algebry odpovídá součet, násobení reálným číslem a součin dvou operátorů. Při  $n \geq 3$  nenulové lineární kombinaci (2.6) odpovídá nenulový operátor. Postačí ověřit působení tohoto operátoru na tenzor jen s jednou nenulovou složkou, např.  $f_{123}$ . Každý člen v součtu je tenzorem  $a = \sum_{\varphi} a(\varphi)\bar{\varphi}f$  s jednou složkou různou od nuly a všechny tyto složky jsou od sebe různé, takže součet nemůže být roven nule.

Podle námi vysloveného lemmatu s přihlédnutím k výkladu o grupové algebře  $\mathfrak{A}$ , projektoem  $\mathbf{P}$  invariantního (vzhledem ke všem transformacím  $\mathbf{T}_1^{(3)}(g)$ ) podprostoru  $\mathcal{F}_0$  může být jedině operátor  $a = \sum_{\varphi} a(\varphi)\bar{\varphi}$  reprezentace grupové algebry  $\mathfrak{A}$ . Ze vztahu  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$  a odtud vyplývající rovnosti  $a^2 = a$  dostáváme, že  $a$  je idempotentem (prvkem rovným své druhé mocnině). Idempotenty zde nadále budeme označovat písmenem  $e$  s různými indexy. Jmenovitě, jednotkovým prvek grupy rovněž je idempotentem.

Budiž  $e = \sum_i e_i$  rozklad jednotkového prvku  $e$  grupy v řadu, přičemž  $e_i^2 = e_i$ ,  $e_i e_j = 0$ ,  $i \neq j$ . Jde tedy o ortogonální systém idempotentů. Tedy těmto idempotentům odpovídající operátory  $\bar{e}_i$  v prostoru tenzorů  $\mathcal{F}_0$  jsou projektory na mezi sebou ortogonálními podprostory  $\sum_i \bar{e}_i \mathcal{F}_0$ . Jestliže libovolný idempotent  $e_i$  je dále již nerozložitelný na ortogonální idempotenty, podprostor  $\bar{e}_i \mathcal{F}_0$  je ireducibilním podprostorem vzhledem k tenzorové reprezentaci ortogonální grupy.

Vše tedy nasvědčuje tomu, že je třeba zaměřit pozornost na strukturu grupové algebry  $\mathfrak{A}$  grupy  $S_3$ . Tato grupa má dva generátory

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 1, & 3, & 2 \end{pmatrix}.$$

Poznámka 3: necht'  $G$  je grupa a  $\{G_i, i \in I\}$  neprázdný systém podgrup v  $G$ . Potom  $\bigcap_{i \in I} G_i$  je podgrupa v  $G$ . Je-li  $G$  grupa a  $M \subset G$ , potom existuje nejmenší podgrupa  $M^*$  v  $G$  obsahující  $M$ . O množině  $M^*$  říkáme, že je generována množinou  $M$  a množina  $M$  je množina generátorů. Existuje vzájemný vztah mezi generující množinou  $M$  a generovanou podgrupou  $M^*$  v grupě  $G$ .

Při známé soustavě generátorů grupy  $S_3$  všechny její prvky mají tvar  $e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau$  a platí  $\sigma\tau = \tau\sigma^2, \sigma^2\tau = \tau\sigma, \sigma^3 = \tau^2 = e$ . Podotkněme, že pro počítání s mocninami platí v grupách též pravidla jako pro počítání s mocninami v číselných množinách (např.  $\sigma \cdot \sigma = \sigma^{1+1} = \sigma^2$ ).

Prvky  $e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau$  tvoří bázi algebry  $\mathfrak{A}$ , kterou je 6ti dimenzionální vektorový prostor. Jestliže všechny prvky algebry  $\mathfrak{A}$  vynásobíme zprava libovolným prvkem, získáme lineární podprostor tohoto 6ti dimenzionálního prostoru. Pokud totiž  $ae_i = be_j$ , pak po vynásobení zprava prvkem  $e_i$  dostaneme  $ae_i = 0$ . A tak, jestliže  $e_i$  udává součet ortogonálních idempotentů  $e'_i$  a  $e''_i$ , rozkládá se  $\mathfrak{A}e_i$  na direktní součet  $\mathfrak{A}e'_i$  a  $\mathfrak{A}e''_i$  a dimenze prostoru  $\mathfrak{A}e_i$  je rovna součtu dimenzí  $\mathfrak{A}e'_i$  a  $\mathfrak{A}e''_i$ .

Necht' pro prvky algebry  $\mathfrak{A}$  platí

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{6}(e + \sigma + \sigma^2 + \tau + \sigma\tau + \sigma^2\tau), \\ e_2 &= \frac{1}{6}(e + \sigma + \sigma^2 - \tau - \sigma\tau - \sigma^2\tau), \\ e_3 &= \frac{1}{6}(2e - \sigma - \sigma^2 + 2\tau - \sigma\tau - \sigma^2\tau), \\ e_4 &= \frac{1}{6}(2e - \sigma - \sigma^2 - 2\tau + \sigma\tau + \sigma^2\tau). \end{aligned}$$

Je zřejmé, že  $e = \sum_i e_i$  a  $e_i^2 = e_i, e_i e_j = 0$  pro  $i \neq j$ .

Naším úkolem nyní je dokázat nerozložitelnost těchto idempotentů, tj. prvků  $e_1, e_2, e_3, e_4$ . Uvážíme-li zápisy  $\sigma e_1$  a  $\tau e_1$ , ihned vidíme, že  $\mathfrak{A}e_1$  je jednodimenzionální prostor. Totéž lze říci o  $\mathfrak{A}e_2$ . Odtud dostáváme, že  $e_1$  a  $e_2$  nelze rozložit. Další idempotenty, pro něž  $\mathfrak{A}e_i$  je jednodimenzionální podprostor, neexistují. Přihlédneme-li k tomu, že součet dimenzí podprostorů  $\mathfrak{A}e_1$  až  $\mathfrak{A}e_4$  je roven 6, podprostory  $\mathfrak{A}e_3$  a  $\mathfrak{A}e_4$  právě jsou dvoj-

dimenzionální. Idempotent  $e_4$  nelze rozložit, neboť v opačném případě  $\mathfrak{A}e_3$  bychom mohli rozložit na jednodimenzionální podprostory  $\mathfrak{A}e'_3$  a  $\mathfrak{A}e''_3$ , avšak takové podprostory neexistují. To platí i pro idempotent  $e_4$ . Pro hledaný rozklad tedy máme  $e = \sum_{i=1}^4 e_i$ .

Zabývejme se otázkou: Co jsou podprostory  $\bar{e}_1\mathcal{F}_0$  až  $\bar{e}_4\mathcal{F}_0$ ? Odpovíme: Operátor  $\bar{e}_1$  je symetrizačním operátorem,  $\bar{e}_2$  alternujícím operátorem, tj.  $\bar{e}_1\mathcal{F}_0$  jsou symetrické tenzory a  $\bar{e}_2\mathcal{F}_0$  antisymetrické tenzory s nulovou stopou. Dále  $\bar{e}_3\mathcal{F}_0$ , a to jsou právě tenzory systémů hydrodynamického typu. Vyplývá tak z toho, že (ověřujeme vlastnosti (2.2) a (2.3))

$$\begin{aligned} (\bar{e} - \bar{\tau})\bar{e}_3\mathcal{F}_0 &= \frac{1}{6}(\bar{e} - \bar{\tau})(2\bar{e} - \bar{\sigma} - \bar{\sigma}^2 + 2\bar{\tau} - \bar{\sigma}\bar{\tau} - \bar{\sigma}^2\bar{\tau})\mathcal{F}_0 \\ &= \frac{1}{6}(2\bar{e} - \bar{\sigma} - \bar{\sigma}^2 + 2\bar{\tau} - \bar{\sigma}\bar{\tau} - \bar{\sigma}^2\bar{\tau} - 2\bar{\tau} + \bar{\sigma}^2\bar{\tau} + \bar{\sigma}\bar{\tau} - 2\bar{e} + \bar{\sigma}^2 + \bar{\sigma})\mathcal{F}_0 = 0. \end{aligned}$$

Podobně je tomu i v druhém případě, kde

$$(\bar{e} - \bar{\sigma} + \bar{\sigma}^2)\bar{e}_3\mathcal{F}_0 = 0.$$

Také  $\bar{e}_4\mathcal{F}_0$  je prostor tenzorů splňujících (2.3), avšak místo (2.2) nastoupí antisymetrie v posledních indexech:  $(\bar{e} + \bar{\tau})\mathcal{F}_0 = 0$  a takové tenzory označíme jako tenzory systémů kvazihydrodynamického typu.

Uhrnem tedy můžeme říci, že prostor tenzorů s nulovými stopami můžeme vyjádřit ve tvaru ortogonálního součtu čtyř invariantních ireducibilních podprostorů: podprostoru symetrických tenzorů, podprostoru antisymetrických tenzorů, podprostoru tenzorů systémů hydrodynamického typu a podprostoru tenzorů kvazihydrodynamického typu. Tím pokládáme teorem 1 za dokázaný.

## 2.2 Ekvivalence tripletu (nejjednoduššího netriviálního systému hydrodynamického typu) a Eulerových diferenciálních rovnic rotace

Podle odstavce 2.1 je fázovým prostorem systémů hydrodynamického typu lineární vektorový  $n$ -dimenzionální prostor. Protože počet  $N$  nezávislých složek dynamického tenzoru  $\Gamma_{jk}^i$  je roven  $N = n(n^2 - 4)/3$ , vidíme, že  $N$



nabývá kladných hodnot od  $n = 3$  a tomu odpovídá  $N = 5$ . A tak v obecném případě pohybové rovnice tripletu v jistém ortogonálním systému souřadnic závisí na pěti parametrech a platí [5,6]

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= p_0 v_2 v_3 + l(v_2^2 - v_3^2) + m v_1 v_2 - n v_1 v_3, \\ \dot{v}_2 &= q_0 v_3 v_1 + m(v_3^2 - v_1^2) + n v_2 v_3 - l v_2 v_1, \\ \dot{v}_3 &= r_0 v_1 v_2 + n(v_1^2 - v_2^2) + l v_3 v_1 - m v_3 v_2,\end{aligned}\quad (2.8)$$

kde  $p_0 + q_0 + r_0 = 0$  a ostatní koeficienty jsou libovolné.

Rovnice (2.8) jsou ekvivalentní Eulerovým diferenciálním rovnicím rotace tuhého tělesa, které v energetické reprezentaci ( $2E = g_{ik} u^i u^k$ ) mají tvar

$$\dot{u}_1 = p u_2 u_3, \quad \dot{u}_2 = q u_3 u_1, \quad \dot{u}_3 = r u_1 u_2 \quad (2.9)$$

a přitom  $p + q + r = 0$ .

Abychom toto tvrzení dokázali, uvědomme si, že tenzor  $\Gamma_{ijk}$  je v libovolném souřadnicovém systému určen 5ti nezávislými parametry a při ortogonální transformaci souřadnic jsou hodnoty parametrů lineárními funkcemi parametrů původních. Takovou vlastnost mají symetrické tenzory 2. řádu  $A_{jk}$  s maticí  $\mathbf{A}$ , jejíž stopa  $\text{Sp}\mathbf{A}$  je nulová. Jestliže se nám podaří invariantně stanovit vzájemně jednoznačný vztah mezi složkami tenzoru  $\Gamma_{ijk}$  a symetrickými maticemi  $\mathbf{A}$  s  $\text{Sp}\mathbf{A} = 0$ , pak touto cestou získáme  $\Gamma_{ijk}$  v jistém kovariantním tvaru. Hledaný izomorfismus dostaneme užitím Levi-Civita tenzoru  $\varepsilon_{ijl}$ , což je tenzor 3. řádu antisymetrický ve všech indexech, přičemž jeho nenulové složky nabývají hodnot  $\pm 1$ . Hodnotu  $+1$  připisujeme té složce, jejíž indexy (navzájem různé) jsou sudou permutací čísel 1, 2, 3. Platí

$$A_{ik} = \varepsilon_{ijl} \Gamma_{jlk}. \quad (2.10)$$

Po dosazení složek tenzoru  $\Gamma_{ijk}$  daných koeficienty v (2.9) do (2.10), dojdeme k matici

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} q_0 - r_0 & 3n & 3m \\ 3n & r_0 - p_0 & 3l \\ 3m & 3l & p_0 - q_0 \end{vmatrix}.$$

Provedeme-li transformaci převádějící  $\mathbf{A}$  na diagonální tvar

$$\mathbf{A}' = \begin{vmatrix} A'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A'_{33} \end{vmatrix}$$

a přihlédneme-li k tomu, že nové koeficienty  $p$ ,  $q$ ,  $r$  rovněž splňují vztah  $p + q + r = 0$ , máme

$$p = \frac{1}{3}(A'_{33} - A'_{22}),$$

$$q = \frac{1}{3}(A'_{11} - A'_{33}),$$

$$r = \frac{1}{3}(A'_{22} - A'_{11})$$

a ostatní parametry jsou nulové. V nových proměnných  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  pohybové rovnice mají tvar (2.9) a tvrzení je dokázáno.

### 2.3 Strukturální vlastnosti kvadraticky nelineárních systémů. Afinní invarianty a kriterium existence kvadratického integrálu v systémech 2. řádu

Nejprve definujme pojem ekvivalence dvou takových systémů, na níž založíme pojem struktury kvadraticky nelineárních systémů. Dva systémy tohoto typu nazvěme ekvivalentní, jestliže lze pomocí inverzní lineární transformace docílit číselné rovnosti složek tenzoru  $\Gamma_{jk}^i$  v pohybových rovnicích těchto systémů. O ekvivalentních systémech pak říkáme, že mají stejnou strukturu. Příklady strukturálních vlastností, na jejichž základech jsme zavedli systémy hydrodynamického typu, jsou regularita a existence kvadratického integrálu pohybu. Rovněž počet nezávislých lineárních integrálů systému je strukturální vlastnost. Pokud lineární integrály pohybu neexistují, hovoříme o nedegenerovaném systému. Příkladem jednonásobně degenerovaného systému je symetrický setrvačnick, pro jehož momenty setrvačnosti tělesa vzhledem k osám voleným tak, aby splynuly s hlavními osami setrvačnosti, platí  $J_1 = J_2 = J$ . Eulerovy rovnice nabývají tvaru

$$J\dot{\omega}_1 = (J_3 - J)\omega_2\omega_3,$$

$$J\dot{\omega}_2 = -(J_3 - J)\omega_1\omega_3,$$

$$J_3\dot{\omega}_3 = 0;$$

$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  je vektor úhlové rychlosti rotace v soustavě souřadnic pevně s tělesem spojené. Protože v tomto případě existuje integrál momentu hybnosti, je  $\omega_3 = \text{konst}$  a pohybové rovnice setrvačnicku jsou fakticky lineární.

Přirozeně vzniká otázka o kriteriích existence kvadratických integrálů pohybu. Jsou-li nám známy toliko pohybové rovnice systému  $\dot{x}^i = (1/2)\Gamma_{jk}^i x^j x^k$  a chtěli bychom nalézt kvadratickou formu  $S = (1/2)a_{ik} x^i x^k$ , která by byla integrálem pohybu ( $\dot{S} \equiv 0$ ), pak z pohybové rovnice pro neznámé koeficienty  $a_{ik}$  dostáváme systém lineárních homogenních rovnic

$$a_{im}\Gamma_{jk}^m + a_{jm}\Gamma_{ki}^m + a_{km}\Gamma_{ij}^m = 0. \quad (2.11)$$

Je to systém  $N = n(n+1)(n+2)/3!$  rovnic pro  $M = n(n+1)/2$  neznámých. Pro  $n \geq 2$  je počet rovnic vždy větší než počet neznámých (např. pro  $n = 4$  je  $N = 20$  a  $M = 10$ ) a podmínka kompatibility klade podstatná ohraničení na koeficienty interakce  $\Gamma_{jk}^i$ . Připomeňme si, že kompatibilním rozumíme systém rovnic, pro který existují hodnoty neznámých, jež vyhovují daným rovnicím. Geometricky kompatibilita systému rovnic značí existenci společných bodů variet určených rovnicemi.

Systém  $\dot{x}_i = (1/2)\Gamma_{jk}^i x^j x^k$  připouští existenci pozitivně definitního integrálu pohybu toliko tehdy, je-li (2.11) kompatibilním systémem a mezi možnými řešeními systému budou taková, pro něž forma  $S$  bude pozitivně definitní. Avšak tento přístup k problému existence kvadratického integrálu pohybu prakticky nelze použít již pro  $n = 3$ .

Pro jednodušší kvadraticky nelineární systémy 2. a 3. řádu máme možnost dospět k jednoduchému kriteriu postupem opírajícím se o afinní invarianty systémů diferenciálních rovnic. Takový postup je příhodný, neboť při něm nalezené integrály pohybu jsou bezprostředně spojeny s pohybovými rovnicemi [5].

Poznámka 4: necht'  $A$  je lineární zobrazení v lineárním prostoru  $\mathcal{B}$ . Přiřaďme každé bázi matici  $(a_i^k)$  zobrazení  $A$  v této bázi, tj. položme  $Ae_i = a_i^k e_k$ . Tenzor 2. řádu  $a_i^k$  jednou kovariantní a jednou kontravariantní nazvěme afinorem. Speciálně identickému zobrazení odpovídá v každé bázi jednotková matice, tj. soustava čísel  $\delta_i^k$  a tedy je  $\delta_i^k$  nejjednodušší afinor 2. řádu jednou kovariantní a jednou kontravariantní. Takový tenzor má složky, které jsou v každé soustavě souřadnic stejné.

V našem případě s přihlédnutím k pohybovým rovnicím je afinor  $\Gamma(\mathbf{x})$  v libovolném souřadnicovém systému dán maticí

$$\Gamma_j^i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^j} = \Gamma_{jm}^i x^m.$$

Pomocí afinoru  $\Gamma(\mathbf{x})$  máme možnost zapsat rovnice perturbovaného systému (perturbační rovnice) v blízkém okolí trajektorie  $x^i(t)$ . Položíme-li  $x^i = x^i(t) + y^i$ , kde  $x^i(t)$  vyhovuje výchozím pohybovým rovnicím a zanedbáme-li kvadratické členy, dostáváme  $\dot{\mathbf{y}} = \Gamma(\mathbf{x})\mathbf{y}$ . Odtud nahlédneme, že vlastní hodnoty afinoru (operátoru)  $\Gamma(\mathbf{x})$  jsou jistými skalárními funkcemi vektoru  $\mathbf{x}$  a mají rozměr  $t^{-1}$ . Vlastnost symetrie tenzoru  $\Gamma_{jk}^i$  v indexech  $j, k$  lze vyjádřit vztahem  $\Gamma(\mathbf{x})\mathbf{y} = \Gamma(\mathbf{y})\mathbf{x}$ , podle něhož lineární pole afinorů  $\Gamma(\mathbf{x})$  ve fázovém prostoru je vzájemně jednoznačně spojeno s pohybovými rovnicemi systému. Místo vlastních čísel matice  $(\Gamma_j^i)$  (afinoru  $\Gamma$ ) lze uvažovat vztahy

$$-\sigma(\mathbf{x}) = \text{Sp}\Gamma(\mathbf{x}), \quad \chi = \chi_2 = \text{Sp}\Gamma^2(\mathbf{x}), \quad \chi_3 = \text{Sp}\Gamma^3(\mathbf{x}), \dots,$$

kteří jsou homogenními polynomy (formami) různého řádu stavového vektoru  $\mathbf{x}$  s rozměrem frekvence různého stupně a určují symetrické tenzory příslušného řádu. Mezi těmito formami funkcionálně nezávislými může být nejvýše  $n$  forem, neboť  $\chi_{n+1}, \chi_{n+2}, \dots$ , lze vyjádřit pomocí  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ . Podotkneme, že pro regulární systémy  $\text{Sp}\Gamma(\mathbf{x}) = -\sigma \equiv 0$ .

Přejdeme nyní již ke kvadratickým nelineárním systémům pro  $n = 2$  a ukažme, že integrál pohybu  $E = (1/2)g_{ik}x^i x^k$  lze zapsat ve tvaru  $E = (J/2)(\sigma^2 + \dot{\sigma})$ .  $E$  má rozměr energie a proto  $J$  má rozměr momentu setrvačnosti. S výhodou zde použijeme kanonického souřadnicového systému s jednou souřadnicí  $\sigma$  a druhou souřadnicí  $\xi$  zvolenou tak, aby součet čtverců  $\sigma^2 + \xi^2$  se až na konstantu shodoval s energií, tedy aby tento součet byl integrálem pohybu. Volba takového souřadnicového systému je vždy možná. Pro pohybové rovnice poté máme

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2}\Gamma_{111}\xi^2 + \Gamma_{112}\xi\sigma + \frac{1}{2}\Gamma_{123}\sigma^2,$$

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2}\Gamma_{211}\xi^2 + \Gamma_{212}\xi\sigma + \frac{1}{2}\Gamma_{222}\sigma^2.$$

Koeficienty  $\Gamma_{ijk}$  splňují vztahy

$$\frac{d}{dt}(\xi^2 + \sigma^2) \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} \equiv -\sigma.$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} \Gamma_{111} = \Gamma_{122} = \Gamma_{212} = \Gamma_{222} &= 0, \\ \Gamma_{112} &= -1, \quad (1/2)\Gamma_{212} = 1. \end{aligned}$$

V kanonickém souřadnicovém systému bude  $d\xi/dt = -\xi\sigma$ ,  $d\sigma/dt = \xi^2$  a integrál pohybu  $E = (1/2)(\sigma^2 + \xi^2)$  může být zapsán v afinně invariantním tvaru  $E = (1/2)(\sigma^2 + \dot{\sigma})$ . Veličiny  $\sigma$  a  $\dot{\sigma}$  bezprostředně nalezneme z pohybových rovnic. Každý jiný kvadratický integrál se může lišit od  $E$  toliko konstantním faktorem.

Odtud dospíváme ke kritériu existence pozitivně definitního integrálu pohybu kvadraticky nelineárního systému diferenciálních rovnic. Nejprve z pohybových rovnic stanovíme  $\sigma$ , poté časovou derivaci  $\dot{\sigma}$  a sestavíme formu  $E = (1/2)(\sigma^2 + \dot{\sigma})$ . Jestliže po dosazení do pohybových rovnic zjistíme, že  $\dot{E} \equiv 0$  a je-li přitom  $E$  pozitivně definitní kvadratickou formou, bude  $E$  integrálem pohybu. Může nastat případ, kdy  $\dot{E} \equiv 0$  a tehdy systém nemá kvadratické integrály. Také se můžeme setkat s případem, kdy  $E$  je integrálem pohybu, avšak zápis pro  $E$  není pozitivně kvadratickou formou.

Uveďme si zde příklady systémů diferenciálních rovnic, v nichž se s popsanými situacemi můžeme setkat. Nejprve uvažme systém pohybových rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -6x^2 - 7xy - 2y^2, \\ \dot{y} &= 10x^2 + 11xy + 3y^2. \end{aligned}$$

Pro veličinu  $\sigma = -\text{Sp } \Gamma(\mathbf{x}) = \partial u^i / \partial u^i$  (sčítáme podle  $i$ ) dostáváme  $\sigma = -(\partial \dot{x} / \partial x + \partial \dot{y} / \partial y) = 12x + 7y - 11x - 6y = x + y$ . S přihlédnutím k pohybovým rovnicím dále máme

$$\dot{\sigma} = \dot{x} + \dot{y} = 4x^2 + 4xy + y^2 = (2x + y)^2 > 0.$$

Kvadratická forma

$$E = \frac{1}{2}(\sigma^2 + \dot{\sigma}) = \frac{1}{2}((x + y)^2 + (2x + y)^2) = \frac{1}{2}(5x^2 + 6xy + 2y^2) > 0$$

je tedy pozitivně definitní a platí

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \frac{\partial E}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y} \dot{y} = \\ &= (5x + 3y)(-6x^2 - 7xy - 2y^2) + (3x + 2y)(10x^2 + 11xy + 3y^2) \equiv 0. \end{aligned}$$

Proto je  $E$  kvadratickým integrálem pohybu.

Naproti tomu, jak se snadno přesvědčíme, systém

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^2 - 3y^2, \\ \dot{y} &= x^2 + 4xy - y^2\end{aligned}$$

nemá integrál pohybu;  $E = (1/2)(\dot{\sigma}^2 + \dot{\sigma}) = 4(x^2 + y^2) > 0$ , avšak  $(d/dt)(x^2 + y^2) = 2(-x^3 + x^2y + xy^2 - y^3) \equiv 0$ . Třebaže další námi uvažovaný systém

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy, \\ \dot{y} &= x^2\end{aligned}$$

má integrál pohybu ( $E = (1/2)(y^2 - x^2)$ ),  $\dot{E} \equiv 0$ , kvadratická forma  $E$  tohoto systému není pozitivně definitní. Tehdy existují integrální křivky, které v konečném čase expandují do nekonečna.

## 2.4 Algebraické integrály regulárních systémů 3. řádu

Věnujme i nadále pozornost systémům hydrodynamického typu. Víme, že v energetické reprezentaci je systém kvadraticky nelineárních rovnic (2.9) ekvivalentní Eulerovým diferenciálním rovnicím rotace

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= px_2x_3, \\ \dot{x}_2 &= qx_3x_1, \\ \dot{x}_3 &= rx_1x_2; \quad p + q + r = 0.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Nechť  $pr > 0$ ,  $pq < 0$  a  $rq < 0$ . Tehdy módy  $x_1$  a  $x_3$  jsou stabilní a mód  $x_2$  nestabilní. Pro afinor systému (2.12) dostáváme

$$\Gamma_j^i(\mathbf{x}) = \left\| \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & px_3 & px_2 \\ qx_3 & 0 & qx_1 \\ rx_2 & rx_1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Systém (2.12) je regulární ( $\text{Sp}\Gamma = 0$ ) a pro charakteristickou funkci (kvadratickou formu)  $\chi$  podle zápisu  $\chi = \chi_2 = \text{Sp}\Gamma^2(\mathbf{x})$  máme

$$\chi = 2qrx_1^2 + 2rpx_2^2 + 2pqx_3^2 \equiv B(\mathbf{x}).\tag{2.13}$$

Jde-li o nedegenerovaný systém, kvadratická forma rovněž je nedegenerovaná a tvoří ji dva záporné a jeden kladný člen. Má tedy signaturu  $(- - +)$ .

Pro jednonásobně degenerovaný systém (symetrický setrvačnick) kvadratická forma má jeden sčítanec se záporným znaménkem. Dvojnásobně degenerovaný triplet odpovídá triviálnímu systému se všemi nulovými koeficienty. Pokud kvadratická forma jistého systému 3. řádu má signaturu lišící se od  $(- - +)$ , znamená to, že systém není systémem hydrodynamického typu, neboť takový systém nemá pozitivně definitní integrál pohybu. Při „správné“ signatuře pokračujeme v analýze a s přihlédnutím k pohybovým rovnicím systému stanovíme veličiny  $d\chi/dt$ ,  $d^2\chi/dt^2$  a  $d^3\chi/dt^3$ , které jsou formami 3., 4. a 5. řádu. Označme je písmeny  $C$ ,  $D$  a  $E$ .

Pro výchozí formu  $B(\mathbf{x}) \equiv \chi = 2qrx_1^2 + 2rpx_2^2 + 2pqx_3^2$  odtud dostáváme

$$\frac{d\chi}{dt} = 12pqr x_1 x_2 x_3 \equiv C(\mathbf{x}), \quad (2.14)$$

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = 12pqr(p(x_2 x_3)^2 + q(x_3 x_1)^2 + r(x_1 x_2)^2) \equiv D(\mathbf{x}), \quad (2.15)$$

$$\frac{d^3\chi}{dt^3} = 48pqr x_1 x_2 x_3 (qrx_1^2 + rpx_2^2 + pqx_3^2) \equiv E(\mathbf{x}). \quad (2.16)$$

Porovnáním (2.16) s (2.14) a (2.13) dospíváme k důležité afinně invariantní podmínce

$$E(\mathbf{x}) \equiv 2B(\mathbf{x})C(\mathbf{x}), \quad (2.17)$$

platící pro libovolný systém hydrodynamického typu 3. řádu. Tuto podmínku, vyjadřující formu 5. řádu pomocí součinu forem 2. a 3. řádu, nazvěme podmínkou reducibility. Jde o nutnou podmínku existence kvadratického integrálu pohybu regulárního systému 3. řádu. Obecně však (2.17) není podmínkou postačující. Jak ukážeme později, stane se jí až po splnění jistých doplňujících požadavků. V každém případě ohled na afinně invariantní vztah (2.17) nás pro kvadratickou formu přivádí k diferenciální rovnici 3. řádu, ekvivalentní systému 3 rovnic prvního řádu popisující triplet v kanonické reprezentaci.

Vraťme se k zápisu (2.16). Odtud máme

$$\frac{d^3\chi}{dt^3} = 2\chi \frac{d\chi}{dt}. \quad (2.18)$$

Je tedy  $d^2\chi/dt^2 - \chi^2 = -W = \text{konst}$ , kde forma 4. řádu  $W \equiv B^2 - D$  je integrálem pohybu. Po vynásobení (2.18) funkcí  $d\chi/dt$  bude

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 + \chi W - \frac{1}{3} \chi^3 = \Phi = \text{konst} \quad (2.19)$$

a forma 6. řádu

$$\Phi \equiv \frac{1}{2} C^2 + BW - \frac{1}{3} B^3 \equiv \frac{2}{3} B^3 + \frac{1}{2} C^2 - BD$$

je druhým integrálem pohybu.

Diferenciální rovnice (2.19) pro kvadratickou formu  $\chi$  obsahuje dva parametry  $B$  a  $W$  (konstantní podíl trajektorie systému) a tato rovnice je spojována se jménem Weierstrassovým. Po transformaci  $\chi = \beta 6^{1/3}$ ,  $t = \eta 6^{1/3}$  tuto rovnici dostáváme ve standardním tvaru

$$\left( \frac{d\beta}{d\eta} \right)^2 = 4\beta^3 - \beta g_2 - g_3, \quad (2.20)$$

kde  $g_2$  a  $g_3$  jsou tzv. invarianty Weierstrassovy funkce  $\wp$ , která je řešením (2.20);  $g_2 = 2(6)^{1/3} W$ ,  $g_3 = -2\Phi$ .

V následujícím odstavci ukážeme, že podmínky existence pozitivně definitního integrálu pohybu 4.řádu  $W$  a 6. řádu pro systémy hydrodynamického typu vedou na nerovnost

$$4W^3 - 9\Phi^2 > 0. \quad (2.21)$$

K zápisu (2.21) poznamenejme, že nerovnost  $W > 0$  dostáváme z definice  $W = B^2 - dC/dt$  a vedle toho je  $W$  integrálem pohybu. Proto po vystředování podle trajektorie máme  $0 < W = \langle B^2 \rangle$ .

## 2.5 Integrace pohybových rovnic tripletu

Při obecné teoretické analýze pohybových rovnic tripletu obracíme pozornost na jisté „kanonické“ integrály, v nichž vystupují toliko koeficienty výchozích rovnic. Půjde o tři závislé integrály pohybu

$$S_1 \equiv \frac{x_2^2}{q} - \frac{x_3^2}{r}, \quad S_2 \equiv \frac{x_3^2}{r} - \frac{x_1^2}{p}, \quad S_3 \equiv \frac{x_1^2}{r} - \frac{x_2^2}{q},$$

spojené vztahem  $S_1 + S_2 + S_3 = 0$ , či s nimi ekvivalentní integrály



$$\varepsilon_1 \equiv S_3 - S_2, \quad \varepsilon_2 \equiv S_1 - S_3, \quad \varepsilon_3 \equiv S_2 - S_1.$$

Rovněž lze psát

$$\varepsilon_1 = \frac{2x_1^2}{p} - \frac{x_3^2}{q} - \frac{x_2^2}{r}, \quad \varepsilon_2 = \frac{2x_2^2}{q} - \frac{x_1^2}{p} - \frac{x_3^2}{r}, \quad \varepsilon_3 = \frac{2x_3^2}{r} - \frac{x_1^2}{p} - \frac{x_2^2}{q},$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 3S_3, \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 3S_1, \quad \varepsilon_3 - \varepsilon_1 = 3S_2.$$

Také můžeme uvažovat kanonické integrály jako invarianty

$$e_1 = -\left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} pqr\varepsilon_1, \quad e_2 = -\left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} pqr\varepsilon_2, \quad e_3 = -\left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} pqr\varepsilon_3;$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Analytický výraz pro charakteristickou funkci  $B(\mathbf{x})$ , danou vztahem (2.13) získáme, přihlédneme-li k řešení systému (2.12) vyjádřenému pomocí eliptických Jacobiho funkcí. Jestliže časový počátek zvolíme v okamžiku, kdy  $x_3 = 0$ , dostáváme

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \operatorname{dn} \gamma t, \\ x_2 &= A_2 \operatorname{cn} \gamma t, \\ x_3 &= A_3 \operatorname{sn} \gamma t; \\ \operatorname{cn} \tau &= \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 \tau}, \quad \operatorname{dn} \tau = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \tau}; \\ A_1 &= \frac{1}{6^{1/3}} \left( \frac{e_3 - e_1}{qr} \right)^{1/2}, \quad A_2 = \frac{1}{6^{1/3}} \left( \frac{e_3 - e_2}{pr} \right)^{1/2}, \\ A_3 &= \frac{1}{6^{1/3}} \left( \frac{e_2 - e_3}{pq} \right)^{1/2}, \\ k^2 &= \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \\ \gamma &= 6^{-1/2} \sqrt{e_1 - e_3} \approx 0,550 \sqrt{e_1 - e_3}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

kde jsou  $\operatorname{dn} u$ ,  $\operatorname{cn} u$  a  $\operatorname{sn} u$  deltaamplituda  $u$ , kosinusamplituda  $u$  a sinusamplituda  $u$ .

Jestliže nyní přihlédneme k (2.13) a (2.22), a rovněž uvážíme vztah mezi Weierstrassovou funkcí  $\wp$  a eliptickými Jacobiho funkcemi, píšeme

$$\wp(u + \omega') = \frac{1}{3} \left[ (e_3 - e_1) \operatorname{dn}^2 \left\{ u \sqrt{e_1 - e_3} \right\} + (e_3 - e_2) \operatorname{cn}^2 \left\{ u \sqrt{e_1 - e_3} \right\} + (e_2 - e_3) \operatorname{sn}^2 \left\{ u \sqrt{e_1 - e_3} \right\} \right].$$

Poté máme

$$B(\mathbf{x}) = 6^{1/3} \wp(6^{-1/3} t + \omega') \approx 1,817 \wp(0,55 + \omega'). \quad (2.23)$$

Základními periodami Weierstrassovy funkce  $\wp$  jsou  $2\omega$  a  $2\omega'$ , tj.  $\wp(u) = \wp(u; 2\omega, 2\omega')$ , a dále  $e_1 = \wp(\omega)$ ,  $e_2 = \wp(\omega + \omega')$ ,  $e_3 = \wp(\omega')$ .

Protože uvažujeme toliko reálné hodnoty  $e_1, e_2, e_3$ , z teorie eliptických funkcí dostáváme, že druhá poloperioda je ryze imaginární. Pro reálná  $e_1, e_2$  a  $e_3$  taková, že  $e_1 > e_2 > e_3$  dostáváme

$$2\omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau - e_1)(\tau - e_2)(\tau - e_3)}} = \frac{2K(k)}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad (2.24)$$

$$2\omega' = i \int_{-\infty}^{e_3} \frac{d\tau}{\sqrt{(e_1 - \tau)(e_2 - \tau)(e_3 - \tau)}} = \frac{2iK(k')}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad (2.25)$$

kde je  $K(k)$  úplný eliptický integrál 1. druhu:

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \\ &= \frac{\pi}{2} \left( 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left( \frac{1.2}{2.4} \right)^2 k^4 + \dots \right) \end{aligned}$$

a  $k'$  je doplňující modul:  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ .

Výraz (2.23) můžeme získat, nepřihlédneme-li bezprostředně k řešení (2.22) výchozího systému (2.12) a přímo obrátíme pozornost na afinně invariantní popis, přivádějící nás k algebraické diferenciální Weierstrassově rovnici (2.20) pro funkci  $\beta$ . Předností tohoto postupu je, že při něm nepožadujeme zavedení jakéhokoliv souřadnicového systému. Abychom dospěli k požadovanému vztahu, všimněme si, že obecné řešení Weierstrassovy rovnice (2.20) lze pomocí funkce  $\wp$  zapsat ve tvaru

$$\beta(\eta) = \wp(\eta + C), \quad (2.26)$$

kde je  $C$  libovolná konstanta. Jestliže nyní přihlédneme ke vztahu  $e_1 + e_2 + e_3 = 0$  a věnujeme pozornost výrazům pro integrály pohybu  $e_1, e_2, e_3$ , které dostaneme ze zápisů  $W \equiv B^2 - D$ ,  $\Phi \equiv \frac{1}{2}C^2 + BW - \frac{B^3}{3} \equiv \frac{2}{3}B^3 + \frac{1}{2}C^2 - BD$ , dále pak k formulím pro  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  a  $e_1, e_2, e_3$ , můžeme se přesvědčit, že invarianty  $e_1, e_2, e_3$  jsou kořeny kubické rovnice

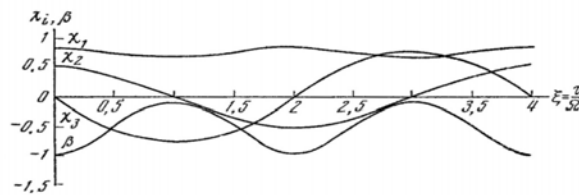
$$4z^3 - g_2z - g_3 = 0, \quad (2.27)$$

shodující se s Weierstrassovou rovnicí (2.20). Pro reálná  $e_1, e_2$  a  $e_3$  je diskriminant  $\Delta$  této rovnice nenulový a bude

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = 12(4W^3 - 9\Phi^2) > 0.$$

Jiným postupem jsme tak dospěli k nerovnosti (2.21). Tehdy z vlastností funkce  $\wp$  plyne, že existuje dvojice primitivních period  $2\omega, 2\omega'$  takových, že  $\omega$  je reálné číslo a  $\omega'$  číslo imaginární a tato čísla jsou určena integrály (2.24) a (2.25), v nichž  $e_1, e_2$  a  $e_3$  vystupují jako funkce  $W$  a  $\Phi$  z řešení kubické rovnice (2.27), kde  $g_2 = 2(6)^{1/3}W$ ,  $g_3 = -2\Phi$ . Uvážíme-li, že funkce  $\beta(\eta)$  je ohraničená a pro libovolné  $\eta$  může nabývat jen reálných hodnot, pak se pomocí známých vlastností funkce  $\wp$  se přesvědčíme, že konstanta  $C$  v (2.26) bude rovna  $\omega'$  a opět se dostáváme ke vztahu (2.23). Spojení  $W$  a  $\Phi$  s  $e_1, e_2$  a  $e_3$  docílíme, přihlédneme-li k výrazům pro symetrické funkce kořenů algebraické rovnice (2.27). Odtud máme

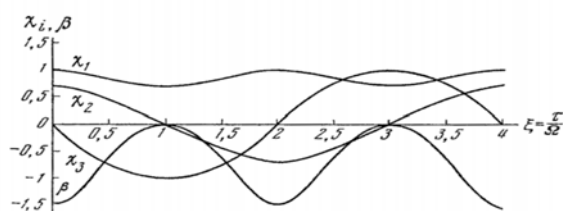
$$W = 6^{-1/3}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2), \quad \Phi = -2e_1e_2e_3.$$



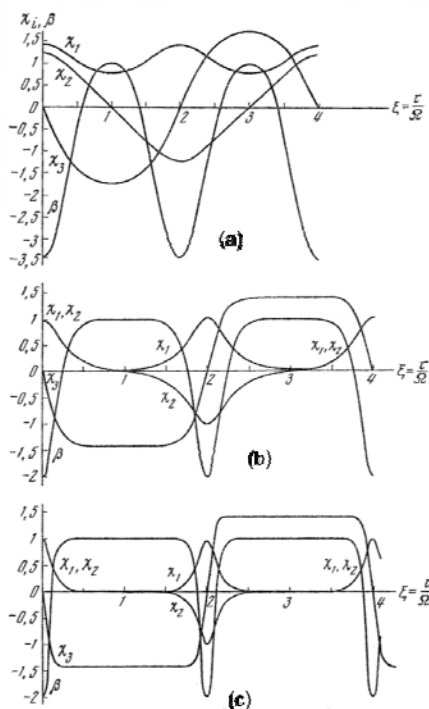
Obr. 2.1 Průběhy závislostí  $\chi_1, \chi_2$  a  $\chi_3$  pohybových rovnic (2.12) a charakteristické formy  $\beta$  na bezrozměrném časovém parametru pro  $k^2 = 0,4$ ;  $\Omega = 2,077$ ;  $\gamma = \pi 2\Omega = 0,756$  [5].

Na obrázcích 2.1, 2.2 a 2.3 jsou v bezrozměrném tvaru vyneseny grafy závislostí řešení  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  systému (2.12) i charakteristické funkce  $\beta$  na bezrozměrném čase pro  $k^2 = 0,4; 0,5; 0,7; 0,99$  a také pro  $k^2 = 1 - 0,74 \cdot 10^{-8}$ . Přitom je čas odečítán v jednotkách, v nichž perioda řešení  $\chi_1, \chi_2$  a  $\chi_3$  je

rovna 4. Povšimněme si, že pro  $k^2$  blízké 0 (prakticky pro  $k^2 \in (0; 0,5)$ ) křivky mají sinusoidální charakter. Pro  $k^2 \rightarrow 1$  extrémní křivky jsou „méně ostré“ a při  $k^2$  velmi blízkém 1 (obr. 2.3b, 2.3c) jeví „stupňovitý“ charakter. Tvary všech těchto křivek lze získat pomocí asymptotických vyjádření eliptických funkcí funkcemi trigonometrickými (pro malá  $k^2$ ) a funkcemi hyperbolickými (pro  $k^2$  blízkí se 1). Tomuto úkolu věnujme pozornost v následujícím odstavci.



Obr. 2.2 Průběhy závislosti  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  a  $\chi_3$  pohybových rovnic (2.12) a charakteristické formy  $\beta$  na bezrozměrném časovém parametru pro  $k^2 = 0,4$ ;  $\Omega = 1,854$ ;  $\gamma = \pi/2\Omega = 0,647$  [5].



Obr. 2.3 Průběh asymptotických řešení pohybových rovnic (2.12) vyjádřených hyperbolickými funkcemi a charakteristické formy  $\beta$  na bezrozměrném časovém parametru pro  $k^2 = 0,7$  (a);  $1-10^{-3}$  (b);  $1-0,7 \cdot 10^{-8}$  (c) [5].

## 2.6 Asymptotické tvary řešení a kvadratické formy dynamického tripletu vyjádřené pomocí elementárních funkcí

Bez újmy obecnosti a pro jednoduchost předpokládejme, že pro koeficienty v (2.12) platí

$$p = q = p_0, r = -2p_0.$$

Nejprve budeme uvažovat případ, kdy  $k^2 \ll 1$ ,  $e_1 = 2a - \delta$ ,  $e_2 = -a + \delta$ ,  $e_3 = -a$ . Pomocí vztahů pro funkce  $A_1, A_2, A_3$  v (2.22) a výrazů (2.24) a (2.25) dojdeme k vyjádřením

$$\omega' \equiv \frac{i\Omega'}{\sqrt{3a}}, \quad \Omega' = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 \right) \ln \frac{16}{k^2} - \frac{k^2}{4} - \frac{37}{128}k^4 + O(k^6 \ln k),$$

$$\omega \equiv \frac{\Omega}{\sqrt{3a}}, \quad \Omega = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{3}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + O(k^6) \right\}.$$

V daném případě je užitečné použít aproximace základních charakteristik tripletu trigonometrickými funkcemi. Po rozvoji eliptických funkcí ve Fourierovu řadu nakonec dospíváme k následujícím vyjádřením pro řešení systému (2.12):

$$\chi_1(\tau) = 1 - (1 + \sin^2 \gamma\tau) \frac{k^2}{2} + (3 + \sin^4 \gamma\tau) \frac{k^4}{8} + O(k^6),$$

$$\chi_2(\tau) = k \cos \gamma\tau \left\{ 1 - \left( 1 + \frac{\sin^2 \gamma\tau}{2} \right) \frac{k^2}{2} - \left( \frac{\sin \gamma\tau \sin 3\gamma\tau}{8} - 3 \right) \frac{k^4}{8} + O(k^6) \right\},$$

$$\chi_3(\tau) = -\sqrt{2}k \sin \gamma\tau \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{\cos^2 \gamma\tau}{2} \right) \frac{k^2}{2} + \left( \frac{\cos \gamma\tau \cos^3 \gamma\tau}{8} + 3 \right) \frac{k^4}{8} + O(k^6) \right\};$$
(2.28)

$$\chi_i(\tau) \equiv \frac{x_i(\tau)}{x_0}, \quad x_0 \equiv \frac{\sqrt{3a}}{6^{1/3} \sqrt{2p_0}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.29)$$

$$\tau \equiv \frac{\sqrt{3a}}{6^{1/3}} t, \quad (2.30)$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2\Omega}. \quad (2.31)$$

Aproximaci pro charakteristickou formu (2.22) dostaneme pomocí známého vztahu mezi Weierstrassovou funkcí  $\wp$  a eliptickými Jacobiho funkcemi, tj.

$$\wp(u + \omega') = e_3 + (e_2 - e_3) \operatorname{sn}^2(u\sqrt{e_1 - e_3}).$$

Platí

$$\beta(\tau) = -1 + 3k^2 \sin^2 \gamma\tau - \left\{ \left( 1 - \frac{\cos^2 \gamma\tau}{2} \right) k^2 + \left[ \frac{\cos^2 \gamma\tau (3 \cos 2\gamma\tau - 8)}{32} + 1 \right] k^4 + O(k^6) \right\}; \quad (2.32)$$

$$\beta(\tau) \equiv \frac{B(\tau)}{B_0}, \quad B_0 \equiv \sqrt[6]{6a}. \quad (2.33)$$

**Tabulka 2.1.** Porovnání asymptotických vztahů (2.28) a (2.32) (sloupce 1) se vztahy (2.34) (sloupce 2) pro  $k^2 = 0,4$  [5].

$\xi_k$	$\chi_1$		$\chi_2$		$-\chi_3$		$-\beta$	
	1	2	1	2	1	2	1	2
0	0,860	0,860	0,544	0,544	0,000	0,000	1,000	1,000
0,1	0,855	0,855	0,536	0,535	0,134	0,138	0,973	0,971
0,2	0,841	0,839	0,511	0,510	0,263	0,269	0,895	0,889
0,3	0,820	0,816	0,472	0,472	0,382	0,383	0,779	0,774
0,4	0,793	0,788	0,422	0,420	0,487	0,489	0,640	0,632
0,5	0,765	0,757	0,362	0,359	0,576	0,578	0,496	0,486
0,6	0,738	0,727	0,295	0,292	0,647	0,650	0,361	0,351
0,7	0,714	0,702	0,224	0,220	0,701	0,705	0,246	0,237
0,8	0,695	0,683	0,151	0,150	0,739	0,740	0,160	0,157
0,9	0,684	0,670	0,076	0,075	0,762	0,753	0,106	0,104
1,0	0,680	0,667	0,000	0,000	0,769	0,770	0,088	0,088

V tabulce 2.1 jsou uvedeny výsledky porovnání výpočtů provedených podle (2.28), (2.32) a pomocí formulí

$$\begin{aligned} \chi_1^{(m)} &= \left( 1 - \frac{k^2}{2} + \frac{3}{8} k^4 \right) \operatorname{dn}(K\xi, k), \\ \chi_2^{(m)} &= k \left( 1 - \frac{k^2}{2} + \frac{3}{8} k^4 \right) \operatorname{cn}(K\xi, k), \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned}
\chi_3^{(m)} &= -k\sqrt{2}\left(1 - \frac{k^2}{2} + \frac{3}{8}k^4\right)\operatorname{sn}(K\xi, k), \\
\beta^{(m)} &= -1 + 3k^2(1 - k^2 + k^4)\operatorname{sn}^2(K\xi, k), \\
\xi &\equiv \tau / \Omega, \quad K(k) \equiv K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},
\end{aligned} \tag{2.34}$$

v nichž hodnoty eliptických funkcí byly vybrány z tabulek při  $k^2 = 0,4$ .

Věnujme dále pozornost případu, kdy  $k^2 = 1/2$ ,  $e_1 = -e_3 = 3a/2$ ,  $e_2 = 0$ . Pro poloviční periody  $\omega$  a  $\omega'$  dostáváme

$$\omega = \frac{K(2^{-1/2})}{\sqrt{3a}}, \quad \omega' = i \frac{K(2^{-1/2})}{\sqrt{3a}},$$

kde

$$K(2^{-1/2}) = \frac{(\Gamma(1/4))^2}{4\pi^{1/2}} \approx 1,8541.$$

Výrazy pro  $x_1, x_2, x_3$  a  $\beta$  v bezrozměrném tvaru nabývají formy

$$\begin{aligned}
\chi_1(\tau) &= \operatorname{dn}\left(\tau, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\
\chi_2(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{cn}\left(\tau, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\
\chi_3(\tau) &= -\operatorname{sn}\left(\tau, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\
\beta(\tau) &= -3\chi_2^2(\tau) = -\frac{3}{2} \operatorname{cn}^2\left(\tau, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Při stanovení Jacobiho eliptických funkcí v (2.35) bylo přihlédnuto k vyjádření eliptických funkcí pomocí funkcí theta. Výsledkem je zápis

$$\begin{aligned}
\chi_1(\tau) &= 2^{-1/4} \left\{ 1 + 4h \cos 2\gamma\tau + 8h^2 \cos^2 2\gamma\tau + 8h^3 \cos^3 2\gamma\tau + O(h^4) \right\}, \\
\chi_2(\tau) &= \sqrt{2}h^{1/4} \cos \gamma\tau \left\{ 1 + 2h \cos 2\gamma\tau + h^2 \left[ 1 + 4 \cos^2 \gamma\tau (1 - 4 \sin^2 \gamma\tau) \right] + \right. \\
&\quad \left. + 2h^3 \cos 2\gamma\tau (1 - 4 \sin^2 \gamma\tau) + O(h^4) \right\},
\end{aligned}$$

$$\chi_3(\tau) = -2^{5/4} h^{1/4} \sin \gamma\tau \left\{ 1 + 2h \cos 2\gamma\tau + h^2 \left[ 1 + 4 \sin^2 \gamma\tau (1 - 4 \cos^2 \gamma\tau) \right] + 2h^3 \cos 2\gamma\tau (1 - 4 \cos^2 \gamma\tau) + O(h^4) \right\},$$

$$\beta(\tau) = -6h^{1/2} \cos^2 \gamma\tau \left\{ 1 + 4h \cos 2\gamma\tau + 2h^2 \left[ 2 \cos 2\gamma\tau (1 + 3 \cos 2\gamma\tau) - 1 \right] + 8h^3 \cos 2\gamma\tau (4 \cos^2 \gamma\tau \cos 2\gamma\tau - 1) + O(h^4) \right\},$$

$$h = e^{-\pi} = 0,04321, \gamma = \frac{\pi}{2K(2^{-1/2})} \approx 0,847.$$

Nakonec uvažme případ s hodnotami  $1/2 < k^2 \leq 1$ ,  $e_1 = a + \delta$ ,  $e_2 = a$ ,  $e_3 = -2a - \delta$ ,  $\delta > 0$ . Tehdy máme

$$\omega \equiv \frac{\Omega}{\sqrt{3a}}, \quad \Omega = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{3}{4}(k')^2 - \frac{39}{64}(k')^4 \right] \ln \frac{16}{(k')^2} - \frac{(k')^2}{4} + \frac{11}{128}(k')^4 + O((k')^6),$$

$$\omega' \equiv \frac{i\Omega'}{\sqrt{3a}}, \quad \Omega' = \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \frac{3}{4}(k')^2 - \frac{39}{64}(k')^4 + O((k')^6) \right].$$

Zde jako vhodná se ukazuje aproximace hyperbolickými funkcemi. Poznamenejme, že tento případ lze převést na případ s  $k^2 \ll 1$ ,  $e_1 = 2a - \delta$ ,  $e_2 = -a + \delta$ ,  $e_3 = -a$ , který jsme vyšetřovali jako prvý, použijeme-li vztahy

$$\operatorname{sn}(u, k) = \frac{1}{i} \frac{\operatorname{sn}(iu, k')}{\operatorname{cn}(iu, k')}, \quad \operatorname{cn}(u, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(iu, k')}, \quad \operatorname{dn}(u, k) = \frac{\operatorname{dn}(iu, k')}{\operatorname{cn}(iu, k')},$$

neboť pro doplňkový modul platí  $k' \ll 1$ . Touto cestou lze pro malé hodnoty argumentu  $\tau$  získat přibližně výrazy

$$\chi_1(\tau) = \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma\tau} \left\{ 1 + (\operatorname{ch}^2 \gamma\tau + 3) \frac{(k')^2}{4} + (7 \operatorname{ch}^2 \gamma\tau + 25) \frac{3(k')^4}{64} + O((k')^6) \right\},$$

$$\chi_2(\tau) = \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma\tau} \left\{ 1 + \left( 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sh}^2 \gamma\tau \right) \frac{(k')^2}{4} + (75 - 19 \operatorname{ch}^2 \gamma\tau) \frac{(k')^4}{64} + O((k')^6) \right\},$$

$$\chi_3(\tau) = -\sqrt{2} \operatorname{th} \gamma\tau \left\{ 1 + \frac{3}{4}(k')^2 + (75 - 2 \operatorname{ch}^2 \gamma\tau) \frac{(k')^4}{64} + O((k')^6) \right\},$$

$$\beta(\tau) = (3 \operatorname{th}^2 \gamma\tau - 2) \left[ 1 + \frac{3}{2}(k')^2 \right] + \left[ \frac{93 - 2 \operatorname{ch}^2 \gamma\tau}{32} \operatorname{th}^2 \gamma\tau - 2 \right] 3(k')^4 + O((k')^6),$$

(2.36)



$$|\tau| \leq \frac{\Omega}{2};$$

$$\gamma = 1 + \frac{3}{4}(k')^2 + \frac{75}{64}(k')^4 + O((k')^6) \quad (2.36)$$

a  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  a  $\beta$  mají též smysl jako v (2.28) a (2.32).

V důsledku exponenciálního nárůstu hyperbolických funkcí, k němuž dochází při rozvoji podle mocnin parametru  $(k')^2$ , získané vztahy lze použít toliko pro dostatečně malé hodnoty argumentu  $\tau$ , určené podmínkou  $\tau \ll \Omega/2$ . Abychom dospěli k zápisům platným v nějakém okolí  $|\tau - \Omega| < \varepsilon$ , uvážíme formule

$$\operatorname{sn}(K \pm u) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{cn}(K \pm u) = \mp k' \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{dn}(K \pm u) = \frac{k'}{\operatorname{dn} u}$$

a tak dospějeme k následujícím aproximacím:

$$\chi_1(\Omega + \tau) = k' \operatorname{ch} \gamma \tau \left\{ 1 + \left( 1 - \frac{\operatorname{sh}^2 \gamma \tau}{4} \right) (k')^2 + \left[ \frac{\operatorname{sh}^2 \gamma \tau (4 \operatorname{sh}^2 \gamma \tau - 21)}{32} + 3 \right] \frac{(k')^4}{2} + O(k')^6 \right\},$$

$$\chi_2(\Omega + \tau) = k' \operatorname{sh} \gamma \tau \left\{ 1 + \left( 1 - \frac{\operatorname{ch}^2 \gamma \tau}{4} \right) (k')^2 + \left[ \frac{\operatorname{ch}^2 \gamma \tau (4 \operatorname{ch}^2 \gamma \tau - 27)}{32} + 3 \right] \frac{(k')^4}{2} + O(k')^6 \right\},$$

$$\chi_3(\Omega + \tau) = -\sqrt{2} \left\{ 1 + (1 - \operatorname{sh}^2 \gamma \tau) \frac{(k')^2}{2} + \left[ \operatorname{sh}^2 \gamma \tau (\operatorname{sh}^2 \gamma \tau - 4) + 7 \right] \frac{(k')^4}{8} + O(k')^6 \right\},$$

$$\beta(\Omega + \tau) = 1 - 3(k')^2 \operatorname{sh}^2 \gamma \tau + \frac{3}{2} \operatorname{sh}^2 \gamma \tau (\operatorname{sh}^2 \gamma \tau - 3)(k')^4 + O((k')^6), \quad |\tau| \leq \Omega/2. \quad (2.37)$$

Zápisy (2.37) platí v jistých okolích bodů  $2\Omega, 3\Omega$  a  $4\Omega$ , s přihlédnutím ke vztahům

$$\begin{aligned}
\chi_1(\tau + 2\Omega) &= \chi_1(\tau), & \chi_1(\tau + 3\Omega) &= \chi_1(\tau + \Omega), & \chi_1(\tau + 4\Omega) &= \chi_1(\tau), \\
\chi_2(\tau + 2\Omega) &= -\chi_2(\tau), & \chi_2(\tau + 3\Omega) &= -\chi_1(\tau + \Omega), & \chi_2(\tau + 4\Omega) &= \chi_2(\tau), \\
\chi_3(\tau + 2\Omega) &= -\chi_3(\tau), & \chi_3(\tau + 3\Omega) &= -\chi_3(\tau + \Omega), & \chi_3(\tau + 4\Omega) &= \chi_3(\tau), \\
\beta(\tau + 2\Omega) &= \beta(\tau), & \beta(\tau + 3\Omega) &= \beta(\tau + \Omega), & \beta(\tau + 4\Omega) &= \beta(\tau).
\end{aligned}$$

V tabulkách 2.2 a 2.3 jsou pro porovnání uvedeny výsledky výpočtů platících pro aproximační a přesné vztahy

$$\begin{aligned}
\chi_1^{(m)} &= \left[ 1 + (k')^2 + \frac{3}{2}(k')^4 \right] \operatorname{dn}(K\xi, k), \\
\chi_2^{(m)} &= \left[ 1 + \frac{(k')^2}{2} + \frac{7}{8}(k')^4 \right] \operatorname{cn}(K\xi, k), \\
\chi_3^{(m)} &= -\sqrt{2} \left[ 1 + \frac{(k')^2}{2} + \frac{7}{8}(k')^4 \right] \operatorname{sn}(K\xi, k), \\
\beta^{(m)} &= -2 \left[ 1 + \frac{3}{2}(k')^2 + 3(k')^4 \right] + 3 \left[ 1 + (k')^2 + 2(k')^4 \right] \operatorname{sn}^2(K\xi, k)
\end{aligned} \tag{2.37a}$$

pro  $k^2 = 0,7$  a  $0,8$  [5].

**Tabulka 2.2.** Porovnání asymptotických vztahů (2.36) a (2.37) (sloupce 1) se vztahy (2.37a) (sloupce 2) pro  $k^2 = 0,7$  [5].

$\xi_k$	$\chi_1$		$\chi_2$		$-\chi_3$		$-\beta$	
	1	2	1	2	1	2	1	2
0	1,44	1,44	1,23	1,23	0,00	0,00	3,44	3,44
0,1	1,42	1,41	1,20	1,20	0,36	0,36	3,27	3,25
0,2	1,37	1,35	1,14	1,13	0,69	0,69	2,80	2,73
0,3	1,29	1,27	1,04	1,02	0,98	0,97	2,04	2,05
0,4	1,18	1,165	0,91	0,89	1,22	1,21	1,26	1,28
0,5	1,05	1,06	0,76	0,73	1,40	1,40	0,48	0,56
0,6	0,97	0,97	0,59	0,58	1,55	1,53	-0,12	-0,03
0,7	0,89	0,89	0,46	0,43	1,64	1,63	-0,55	-0,46
0,8	0,83	0,83	0,28	0,28	1,69	1,69	-0,82	-0,76
0,9	0,80	0,80	0,14	0,14	1,72	1,72	-0,95	-0,94
1,0	0,79	0,79	0,00	0,00	1,74	1,74	-1,00	-1,00

**Tabulka 2.3.** Porovnání asymptotických vztahů (2.36) a (2.37) (sloupce 1) se vztahy (2.37a) (sloupce 2) pro  $k^2 = 0,8$  [5].

$\xi_k$	$\chi_1$		$\chi_2$		$-\chi_3$		$-\beta$	
	1	2	1	2	1	2	1	2
0	1,26	1,26	1,14	1,14	0,00	0,00	2,84	2,84
0,1	1,23	1,23	1,11	1,10	0,36	0,36	2,65	2,64
0,2	1,67	1,67	1,04	1,03	0,68	0,68	2,16	2,15
0,3	1,07	1,06	0,92	0,91	0,95	0,96	1,47	1,46
0,4	0,96	0,95	0,78	0,78	1,18	1,17	0,80	0,79
0,5	0,85	0,84	0,64	0,63	1,34	1,33	-0,19	-0,18
0,6	0,75	0,75	0,51	0,49	1,44	1,44	-0,28	-0,27
0,7	0,67	0,67	0,37	0,36	1,53	1,52	-0,63	-0,62
0,8	0,61	0,61	0,24	0,23	1,57	1,57	-0,85	-0,84
0,9	0,58	0,58	0,12	0,12	1,60	1,60	-0,97	-0,96
1,0	0,56	0,56	0,00	0,00	1,61	1,61	-1,00	-1,00

## 2.7 K statistickému popisu systémů hydrodynamického typu

Statistickým popisem zde rozumíme výčet vlastností těchto systémů založených na vlastnostech Friedmannových-Kellerových rovnic pro statistické momenty proudového pole. V konečnědimenzionálním modelu, který je konečnědimenzionální aproximací rovnic hydrodynamiky, jsou tyto momenty dány symetrickými tenzory různých řádů:

$$u^i = \langle u^i \rangle, \quad B^{ij} = \langle u^i u^j \rangle, \quad B^{ijk} = \langle u^i u^j u^k \rangle,$$

atd. Při známé hustotě pravděpodobnosti  $f$  vyhovující Liouvilleově rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i u^j u^k f \right) = 0$$

je střední hodnota  $\langle \psi \rangle$  stavové funkce  $\psi$  definována vztahem  $\langle \psi \rangle = \int \psi(\mathbf{u}) f(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$ , kde  $d\mathbf{u} = du^1 du^2 \dots du^n$  je element  $n$ -dimenzionálního fázového prostoru systému. Pro složky vektoru charakterizujícího dynamický stav systému poté dostáváme

$$\begin{aligned} \langle u^i \rangle &= \int u^i f d\mathbf{u}, \\ \langle u^i u^j \rangle &= \int u^i u^j f d\mathbf{u} = B^{ij}, \\ \langle u^i u^j u^k \rangle &= \int u^i u^j u^k f d\mathbf{u} = B^{ijk}. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Systém Friedmannových-Kellerových rovnic v konečnědimenzionální aproximaci poté je nekonečný neuzavřený systém obyčejných diferenciálních rovnic tvaru

$$\begin{aligned}\dot{u}^i &= \frac{1}{2} \Gamma_{lm}^i B^{lm}, \\ \dot{B}^{ij} &= \frac{1}{2} \Gamma_{lm}^i B^{jlm} + \frac{1}{2} \Gamma_{lm}^j B^{ilm}, \\ \dot{B}^{ijk} &= \frac{1}{2} \Gamma_{lm}^i B^{jklm} + \frac{1}{2} \Gamma_{lm}^j B^{kilm} + \frac{1}{2} \Gamma_{km}^k B^{ijlm}, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Tento systém je v podstatě ekvivalentní jedné parciální diferenciální rovnici, rovnici Liouvilleově<sup>\*)</sup>. K jeho uzavření pro momenty prvních tří řádů předložil Millionščik [7, 8], tzv. „hypotézu čtvrtých momentů“

$$B^{ijkl} = B^{ij} B^{kl} + B^{ik} B^{jl} + B^{il} B^{kj},$$

za předpokladu, že  $\langle u^i \rangle = 0$ . Její aplikace na systémy hydrodynamického typu při požadavku, aby druhé časové derivace momentů druhého řádu byly nulové (slabá stacionarita) nás přivádí k jistému kvadratickému integrálu pohybu, pomocí kterého lze dostat Gaussovo stacionární rozdělení  $f = C \exp(-\sigma(\mathbf{u}))$ , kde je  $C$  konstanta a  $\sigma(\mathbf{u})$  kvadratická forma úměrná energii:  $\sigma = (\beta/2) g_{ik} u^i u^k$ . Jestliže systém kromě energie nemá žádné další kvadratické integrály, dospíváme k Boltzmannovu rozdělení, v němž parametr  $\beta$  je analogií reciproké teploty. Úhrnem můžeme říci, že netriviální řešení systému Friedmannových-Kellerových rovnic v konečnědimenzionální aproximaci existuje právě tehdy, když kromě integrálu energie známe další kvadratický integrál pohybu.

Poznámka 5: o systému Friedmannových-Kellerových rovnic a jeho uzavírání v obecných topologických prostorech bude více řečeno v oddílu 13.2. Především, že při studiu pohybu spojených prostředí v některých případech je třeba přihlídnout k obecnějším topologickým vektorovým prostorům. Zejména to platí pro prostředí vyplňující nekonečný prostor, jestliže předpokládáme, že konečnou veličinou je toliko energie prostředí v ohraničené oblasti  $D$  a přitom celková energie je nekonečně velká. Obecně vzato, topologie fázového prostoru není definována normou, ale souborem seminorem. Tak je tomu např. v případě topologického vektorového prostoru všech polí rychlosti  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  splňujících pod-

\*) V průběhu sedmdesátých let byly činěny více méně ojedinělé pokusy použít Liouvilleovu rovnici pro prognostické cíle. I když samotné prognostické rovnice jsou ryze dynamické, získané aproximací rovnic termohydrodynamiky, na úlohy spojené s prognózou bylo nahlíženo jako na statistické díky neúplné počáteční informaci (neúplnost měření, turbulence atp.). Dnes tuto ideu vesměs opouštíme.

mínku  $\int_D |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < \infty$  pro  $\sup_D \|\mathbf{x}\| < \infty$ . V hydrodynamice vesměs pracujeme s nekonečnědimenzionálními Banachovými prostory. Důležité jsou zejména Banachovy prostory se spočetnou bází a to prostor  $L^m(D^p)^q$ ,  $m \geq 1$  s normou

$$\|\mathbf{U}\| = \left[ \sum_{j=1}^q \int_{D^{p-1}} |u_j(\mathbf{x})|^m d\mathbf{x} \right]^{1/m}$$

(pro  $m = 2$  jde o Hilbertův prostor; lze položit  $D^p = \mathbb{R}^p$ ) a prostor  $[C(I^p)]^q$ , kde  $I^p$  je uzavřený interval  $-\infty < a_j \leq x_j \leq b_j < \infty$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , s normou

$$\|\mathbf{U}\| \sup_{1 \leq j \leq q} \sup_{x \in I^p} |u_j(\mathbf{x})|$$

a přitom každá funkce  $u_j(\mathbf{x})$  je spojitá na  $I^p$ .

Poznámka 6: zmínka o Banachových prostorech přivádí zvědavého čtenáře k otázce týkající se problému samotné báze. Tento problém předložil již Banach v práci z roku 1932. Posloupnost prvků Banachova prostoru je Schauderova báze prostoru, pokud každý vektor má jednoznačně vyjádření ve tvaru nekonečné lineární kombinace členů posloupnosti. Ze spočetnosti zabudované do definice slova „posloupnost“ vyplývá, že pokud Banachův prostor bázi má, pak je separabilní, tj. obsahuje hustou spočetnou množinu. Problém báze spočívá v obrácení: má každý separabilní prostor bázi? Halmos ve studii [9] tento problém komentuje slovy: Každý prostor, který se kdy v analýze vynořil, bázi měl, a přesto důkaz, že tomu tak musí být, stále uniká. Problém báze byl vyřešen v roce 1973 Emflosem. Ukázalo se, že řešení je negativní – existuje separabilní Banachův prostor, který nemá „aproximační vlastnost“. Poznamenejme, že je-li Banachův prostor „rozumný“, pak každé jeho kompaktní zobrazení do sebe je limitou konečnědimenzionálních operátorů a říkáme, že prostor má aproximační vlastnost.

## 2.8 Komplexifikace systémů hydrodynamického typu. Komplexní triplet v geofyzikální hydrodynamice

Dosavad jsme věnovali pozornost systémům hydrodynamického typu toliko v reálném oboru. Provedme nyní jejich komplexifikaci a zaměříme se na komplexní triplet, který se výrazně podílí na procesu modelování dynamiky rezonančního působení vlnových procesů. Svědčí o tom rozsáhlá literatura, velkou měrou se týkající samotné geofyzikální hydrodynamiky [5, 6]. Navzdory složitosti v ní studovaných dynamických procesů, modely pohybů opírajících se o trojmodální aproximaci ve velké míře vedou k závěrům srovnatelným s pozorovanými jevy.

Nechť  $S_{2m}$  je jistý kvadratický nelineární dynamický systém, jehož řád udává sudé číslo  $2m$ . Řekněme, že systém  $S_{2m}$  připouští komplexní rozšíření,

jestliže při rozkladu systému  $2m$  fázových proměnných na dvojice  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , ...,  $(x_m, y_m)$  (v jistém souřadnicovém systému) a zavedení komplexního stavového vektoru  $z_k = x_k + iy_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , pohybové rovnice mohou být zapsány ve tvaru

$$\dot{z}_k = \Gamma_{jk}^i z^j z^k. \quad (2.38)$$

Zároveň předpokládáme, že existuje kvadratický integrál pohybu – pozitivně definitní hermitovská forma

$$E = z^j g_{ik} \bar{z}^k, g_{ik} = g_{ki}.$$

Tehdy koeficienty v (2.38) (obecně komplexní) vyhovují známým vztahům

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jki} + \Gamma_{kij} = 0.$$

Při komplexifikaci systémů hydrodynamického typu je přirozené omezit se na unitární zobrazení, ponechávající beze změny tvar formy  $z g \bar{z}$ , která v normálním souřadnicovém systému je součtem čtverců modulů komplexních souřadnic. Může se stát, že při volbě souřadnicového systému koeficienty  $\Gamma_{jk}^i$  budou vyjádřeny reálnými nebo ryze imaginárními čísly. V těchto případech je přirozené zaměřit pozornost toliko na podgrupu unitárních zobrazení zachovávajících tuto vlastnost koeficientů  $\Gamma_{jk}^i$ . Takovou grupu nazvěme fundamentální grupou výchozího dynamického systému.

Ukáže-li se, že parametry systému v jisté reprezentaci budou reálné, pak, vyjdeme-li v počátečním časovém okamžiku z reálných souřadnic, pohybové rovnice zaručují, že reálné hodnoty budou existovat pro libovolná  $t > 0$ . Takže podmínka  $\text{Im} z_i = 0$  vede na jistý invariantní podprostor o dimenzi  $m$  a v něm na určitý podsystém o dimenzi  $m$ . S ohledem na tento podsystém budeme výchozí systém nazývat komplexifikovaný. Smysl výše vysloveného tvrzení blíže objasníme na jednoduchém netriviálním systému  $S_2$  ve tvaru

$$\mu \dot{x}_1 = -k x_2 x_1, \quad \dot{x}_2 = k x_1^2. \quad (2.39)$$

Systém (2.39) má integrál pohybu

$$E = \mu x_1^2 + x_2^2.$$

Položme  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ . Pak bude

$$\mu \dot{z}_1 = -k \bar{z}_2 \bar{z}_1, \quad \dot{z}_2 = k \bar{z}_1^2. \quad (2.40)$$

Parametr  $k$  nyní považujeme za komplexní, zatímco  $\mu$  je reálné.

Se systémem (2.40) je komplexně sdružený systém rovnic

$$\mu \bar{z}_1 = -\bar{k} z_2 z_1, \quad \bar{z}_2 = \bar{k} z_1^2 \quad (2.41)$$

s integrálem pohybu (fundamentální formou)

$$E = \mu z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2.$$

Uvažme transformaci proměnných

$$z_1' = \exp(i\theta_1)z_1, \quad z_2' = \exp(i\theta_2)z_2$$

s reálnými fázemi  $\theta_1$  a  $\theta_2$ . Tato transformace zachovává tvar výchozího systému (2.41) a přitom  $k' = k \exp(i(2\theta_1 + \theta_2))$ . Jestliže  $k' = |k| \exp(-i\varphi)$  a když například  $\theta_1 = \varphi/3$ ,  $\theta_2 = -2\varphi/3$ , lze docílit reálné hodnoty  $k'$ . Je tedy fundamentální grupou systému soubor takových transformací, při nichž fáze vyhovují podmínce  $2\theta_1 + \theta_2 = 0$ . Pokud  $k$  bylo reálné, tato podmínka tuto vlastnost zachovává (bez újmy obecnosti lze položit  $k = 1$ ).

Soubor zobrazení ponechávajících beze změny tvar rovnic, budeme nazývat grupou automorfismů systému. V našem případě je to 1-parametrická grupa automorfismů, kde parametrem je fázový úhel jedné ze složek  $\theta_2 = \theta$ ,  $\theta_1 = -\theta/2$ . Na rozdíl od reálného systému připouští komplexní systém existenci kubického integrálu pohybu. Přesvědčíme se o tom tak, že první rovnicí v (2.41) vynásobíme  $2z_1z_2$  a druhou  $\mu z_1^2$ . Po sečtení takto získaných rovnic dostaneme reálnou veličinu

$$\mu \frac{d}{dt}(z_1^2 z_2) = -2|z_1^2| |z_2| + \mu |z_1|^4$$

a tak máme

$$H = \text{Im}(z_1^2 z_2).$$

V explicitním tvaru bude

$$H = (x_1^2 - y_1^2)y_2 + 2x_1y_1x_2.$$

Ve složkách  $x_1, y_1$  a  $x_2, y_2$  mají pohybové rovnice tvar

$$\begin{aligned} \mu \dot{x}_1 &= -x_1x_2 + y_1y_2, \\ \mu \dot{y}_1 &= x_1y_2 + x_2y_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - y_1^2, \\ \dot{y}_2 &= -2x_1y_1; \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\partial \dot{x}_1 / \partial x_1 + \partial \dot{y}_1 / \partial y_1 + \partial \dot{x}_2 / \partial x_2 + \partial \dot{y}_2 / \partial y_2 = 0.$$

Při vhodné volbě parametru ( $\mu = 1/2$ ) můžeme přepsat systém (2.42) do hamiltonovského tvaru. Nejprve spočítáme derivace  $\partial H / \partial x_1$ ,  $\partial H / \partial y_1$ ,  $\partial H / \partial x_2$ ,  $\partial H / \partial y_2$  a poté položíme  $x_1 = p_1$ ,  $y_1 = q_1$ ,  $x_2 = q_2$ ,  $y_2 = p_2$ ,  $\dot{q}_1 = \partial H / \partial p_1$ ,  $\dot{q}_2 = \partial H / \partial p_2$ ,  $\dot{p}_1 = -\partial H / \partial q_1$ ,  $\dot{p}_2 = -\partial H / \partial q_2$ . V nových proměnných má funkce  $H$  tvar

$$H = p_2(p_1^2 - q_1^2) + 2p_1q_1q_2$$

a transformace  $z_1 = p_1 + iq_1$ ,  $z_2 = q_2 + ip_2$  nás přivede k systému, v němž  $H$  je Hamiltonovou funkcí.

Proveďme komplexifikaci samotného tripletu

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= pu_2u_3, & \dot{u}_2 &= qu_3u_1, & \dot{u}_3 &= ru_1u_2, \\ p + q + r &= 0, \end{aligned}$$

v němž položíme  $p = -1 = r$ ,  $q = 1$ . Tehdy dostaneme

$$\dot{z}_1 = -\bar{z}_2\bar{z}_3, \quad \dot{z}_2 = \bar{z}_3\bar{z}_1, \quad \dot{z}_3 = -\bar{z}_1\bar{z}_2. \quad (2.43)$$

Systém (2.43) má dva nezávislé integrály pohybu:

$$\begin{aligned} E &= (1/2)(|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + |z_3|^2), \\ S &= |z_1|^2 - |z_3|^2. \end{aligned}$$

Rovnice (2.43) jsou invariantní vůči transformaci

$$z'_1 = \exp(i\varphi_1)z_1, \quad z'_2 = \exp(i\varphi_2)z_2, \quad z'_3 = \exp(i\varphi_3)z_3,$$

pokud  $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$ . Jestliže při  $t = 0$  je  $z_1 = |z_1| = \rho_1^{(0)}$  a  $z_3 = \rho_3^{(0)}$ , pak  $z_2 = \rho_2^{(0)} \exp(i\varphi)$  a funkce

$$H = \text{Im}(z_1z_2z_3) = \rho_1^{(0)}\rho_2^{(0)}\rho_3^{(0)} \sin \varphi = \text{konst}; \quad (2.44)$$

je  $H$  integrálem pohybu. Derivace  $(d/dt)(z_1z_2z_3) = -|z_2z_3|^2 + |z_3z_1|^2 - |z_1z_2|^2$  je reálná veličina.

Jestliže vyjdeme z funkce  $H$  ve tvaru (2.44), můžeme uvést výchozí pohybové rovnice (2.43) v hamiltonovském tvaru. Stačí položit  $z_1 = p_1 + iq_1$ ,  $z_2 = q_2 + ip_2$ ,  $z_3 = p_3 + iq_3$ , takže  $\dot{z}_1 = -\partial H / \partial q_1 + i(\partial H / \partial p_1) = (p_2q_3 - q_2p_3) + i(q_2q_3 + p_2p_3) = -\bar{z}_2\bar{z}_3$ . Analogicky dostaneme zbývající dvě rovnice.



Nyní položíme  $u = z_1 \exp(i\omega_1 t)$ ,  $v = z_3 \exp(i\omega_3 t)$ ,  $w = z_2 \exp(i\omega_2 t)$ , kde  $\omega_1$  a  $\omega_3$  jsou libovolná,  $\omega_2 = \omega_1 + \omega_3$  (všechny frekvence jsou kladné veličiny) a komplexní amplitudy vyhovují rovnicím (2.48). Tehdy  $u$ ,  $v$ ,  $w$  splňují rovnice harmonických oscilací s doplňujícími členy zahrnujícími nelineární interakce (v kvadratické aproximaci):

$$\dot{u} = i\omega_1 u + p\bar{v}w, \quad \dot{v} = i\omega_3 + r\bar{u}w, \quad \dot{w} = i\omega_2 + quv.$$

Pokud je  $pr > 0$ , pak kmity s největší frekvencí  $\omega_3$  v průběhu dostatečně dlouhé doby (s ohledem na periodu  $T_2 = 2\pi/\omega_2$ ) předávají veškerou energii kmitům s menšími frekvencemi.

V geofyzikální hydrodynamice se setkáváme s komplexním tripletem při studiu rezonanční interakce Rossbyho vln-inerciálně-gyroskopických oscilací v atmosféře rotujících planet [6]. Objevují se jako řešení rovnice dvojdimenzionálního pohybu nestlačitelné tekutiny na ploše kulové, rotující s úhlovou rychlostí  $\omega$ . Pomocí proudové funkce  $\psi$  je lze popsat vztahy

$$\psi = A \exp(im\sigma_n t) Y_{nm}(\vartheta, \lambda), \quad \sigma_n = 2\omega/n(n+1), \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(\vartheta, \lambda)} + 2\omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0. \quad (2.46)$$

Zde je  $\Delta$  Laplaceův operátor na ploše kulové a  $Y_{nm}$  kulové funkce  $n$ -tého řádu. Přitom (2.45) jako vlastní funkce Laplaceova operátoru jsou řešením jak linearizované, tak i původní rovnice (2.46).

Řešení analogická (2.45) existují i v dalších případech dvojdimenzionálního rotačního pohybu tekutiny za podmínky, že Coriolisův parametr  $f$  (dvojnásobek projekce úhlové rychlosti do normály k povrchu tekutiny) je funkcí vzdálenosti  $y$  od osy rotace. Pokud bude  $\beta = df/dy = \text{konst} \neq 0$ , rovnice Rossbyho vln v kartézském souřadnicovém systému lze zapsat takto:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta - \alpha^{-2})\psi + \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0; \quad (2.47)$$

$\alpha^{-1} = (gH)^{1/2}/2\omega$  je Obuchovův parametr a  $H$  výška vrstvy tekutiny. Vlnové řešení rovnice (2.47) má tvar

$$\psi = a \exp(i(kx + ly - \sigma t)) \quad (2.48)$$

a platí disperzní vztah  $\sigma(k^2 + l^2 + 1) + k = 0$ . Jednotky délky a času byly zvoleny tak, aby platilo  $\alpha = \beta = 1$ .

Je třeba si uvědomit, že superpozice vln (2.45) či (2.48) již nevyhovují výchozím nelineárním rovnicím; přítomnost nelineárních členů vede k vzájemné interakci vln. Uvažme dvě vlny typu (2.48) a zapišme je ve tvaru  $\psi_1 = a_1 \exp(i(\mathbf{k}_1 \mathbf{x} - \sigma_1 t))$ ,  $\psi_2 = a_2 \exp(i(\mathbf{k}_2 \mathbf{x} - \sigma_2 t))$ ,  $\mathbf{k} = (k, l)$ ,  $\mathbf{x} = (x, y)$ . Kvadratická nelinearita rovnic generuje sčítanec  $a_1 a_2 \exp(i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathbf{x} - (\sigma_1 + \sigma_2)t)$ , který má význam vynucené síly působící na lineární systém. Odezva na tuto sílu bude malá, pokud nedojde k rezonanci, tj. pokud vlnový vektor a frekvence vynucené síly se nebudou shodovat s vlnovým vektorem  $\mathbf{k}$  a s frekvencí  $\sigma$  libovolné vlastní vlny – řešení lineárního systému. Odtud dojdeme k podmínkám rezonanční interakce tří vln:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (2.49)$$

Přítom každá dvojice  $(\mathbf{k}, \sigma)$  v zápisu (2.49) vyhovuje uvedenému disperznímu vztahu.

Věnujme se nyní dynamice interakce tří harmonických vln. Protože proudová funkce  $\psi$  je reálná, položme

$$\psi = \sum_{i=1}^3 (a_i \exp(i(\mathbf{k}_i \mathbf{x} - \sigma_i t)) + \bar{a}_i \exp(-i(\mathbf{k}_i \mathbf{x} - \sigma_i t))),$$

kde  $a_i$  jsou pozvolna se měnící amplitudy, jejichž změna je především podmíněna přítomností nelineárních členů v rovnicích. Přihlédneme-li zde toliko k rezonanční interakci, dojdeme v obecném případě k rovnicím

$$\dot{a}_1 = c_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3, \quad \dot{a}_2 = c_2 \bar{a}_3 \bar{a}_1, \quad \dot{a}_3 = c_3 \bar{a}_1 \bar{a}_2, \quad (2.50)$$

kde  $c_1, c_2$  a  $c_3$  jsou konstanty. Připustíme-li existenci pozitivně definitního integrálu pohybu a půjde-li přitom o kvadratický integrál pohybu ve tvaru  $2E = a_1 \bar{a}_1 + a_2 \bar{a}_2 + a_3 \bar{a}_3$ , přesvědčíme se, že konstanty  $c_i$  jsou spolu spojeny vztahem  $c_1 + c_2 + c_3 = 0$ . V některých případech amplitudy  $a_i$  mohou být reálnými funkcemi času a tehdy soustava (2.50) je shodná se systémem Eulerových rovnic rotujícího tuhého tělesa.

Věnujme nadále pozornost interakci Rossbyho vln a pro jednoduchost se omezme na rovnici (2.47) pro  $\alpha = \beta = 1$ . Její řešení, popisující vzájemnou interakci tří vln, budeme hledat ve tvaru

$$\begin{aligned} \psi &= a_1 \cos \mathcal{G}_1 + a_2 \cos \mathcal{G}_2 + a_3 \cos \mathcal{G}_3, \\ \mathcal{G}_i &= k_i x + l_i y - \sigma_i t + \varphi_i; \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Pokud fáze v (2.51) vyhovují podmínce  $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$ , pak pro  $\kappa_i = |k_i|^2 = k_i^2 + l_i^2$  lze získat následující systém rovnic, analogický se systémem (2.50):

$$\begin{aligned}
(1 + \kappa_1^2)\dot{a}_1 &= b(\kappa_2^2 - \kappa_3^2)a_2a_3, \\
(1 + \kappa_2^2)\dot{a}_2 &= b(\kappa_3^2 - \kappa_1^2)a_3a_1, \\
(1 + \kappa_3^2)\dot{a}_3 &= b(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)a_1a_2;
\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}
k_1 + k_2 + k_3 &= 0, \quad l_1 + l_2 + l_3 = 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0, \\
\sigma_i(k_i^2 + l_i^2 + 1) + k_i &= 0, \quad 2b = (\mathbf{z}, [\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2]) = (\mathbf{z}, [\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3]) = (\mathbf{z}, [\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1]),
\end{aligned}$$

kde je  $\mathbf{z}$  jednotkový vektor ve směru vertikály.

Soustava (2.52) má dva integrály pohybu

$$\begin{aligned}
E &= (1 + \kappa_1^2)a_1^2 + (1 + \kappa_2^2)a_2^2 + (1 + \kappa_3^2)a_3^2, \\
J &= (1 + \kappa_1^2)^2 a_1^2 + (1 + \kappa_2^2)^2 a_2^2 + (1 + \kappa_3^2)^2 a_3^2,
\end{aligned} \tag{2.53}$$

vyjadřující zákony zachování energie a potenciálového víru, které v případě rovnice (2.47) mají tvar

$$\begin{aligned}
E &= \int \left( \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + \frac{1}{2} \psi^2 \right) dx dy, \\
J &= \int (\Delta \psi - \psi)^2 dx dy.
\end{aligned}$$

Existence integrálů pohybu systémů (2.47) nám umožní získat základní představy o charakteru přenosu energie mezi vlnami s vlnovými čísly  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  a  $\kappa_3$ . Označíme-li si  $\Delta_i$  změnu veličiny  $a_i^2$  v průběhu času počínaje časovým okamžikem  $t_0$  do  $t > t_0$ , pak s pomocí (2.53) dospějeme ke vztahům

$$\begin{aligned}
(1 + \kappa_1^2)\Delta_1 + (1 + \kappa_2^2)\Delta_2 + (1 + \kappa_3^2)\Delta_3 &= 0, \\
(1 + \kappa_1^2)^2 \Delta_1 + (1 + \kappa_2^2)^2 \Delta_2 + (1 + \kappa_3^2)^2 \Delta_3 &= 0
\end{aligned}$$

a posléze k podmínce

$$\frac{1 + \kappa_1^2}{\kappa_2^2 - \kappa_3^2} \Delta_1 = \frac{1 + \kappa_2^2}{\kappa_3^2 - \kappa_1^2} \Delta_2 = \frac{1 + \kappa_3^2}{\kappa_1^2 - \kappa_2^2} \Delta_3.$$

Uvažme případ, kde  $\chi_1^2 < \chi_2^2 < \chi_3^2$ . Tehdy znaménko veličiny  $\Delta_2$  je vždy opačné než znaménka  $\Delta_1$  a  $\Delta_3$ . Odtud je vidět, že vektor toku energie do oblasti vymezené dvěma krajními vlnovými čísly  $\chi_1$  a  $\chi_3$  bude vždy orientován opačně než vektor, směřující k vlnovému číslu  $\chi_2$ . Směr vektoru toku energie určuje nejenom znaménko  $a_1a_2a_3$ , ale též znaménko veličiny  $b(\chi_2^2 - \chi_3^2)$ .

## 3 O SYMETRIZOVANÝCH NELINEÁRNÍCH SYSTÉMECH

### 3.1 Symetrizované systémy a jejich obecné vlastnosti

Dříve než přikročíme k vlastnímu tématu, odvíjejícímu se od Hamiltonových systémů, (viz oddíl 13.9) připomeňme si, že při daném hamiltoniánu  $H = H(q_i, p_i, t)$ , kde  $q_i$  a  $p_i$  jsou zobecněné souřadnice a hybnosti a  $t$  je čas, odpovídající kanonické rovnice mají tvar  $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$ ,  $\dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i$ . Tyto rovnice platí v okolí libovolného bodu fázového prostoru, tj.  $2n$ -dimenzionálního prostoru se souřadnicemi  $(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$ . Právě strany kanonických Hamiltonových rovnic zadávají vektorové pole – v každém bodě  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  fázového prostoru dostáváme  $2n$ -dimenzionální vektor se složkami  $(\partial H / \partial p_i, -\partial H / \partial q_i)$ . Předpokládáme, že každé řešení těchto rovnic lze prodloužit na celou časovou osu („doba života“ řešení není konečná) a k tomu je postačující podmínkou např. to, aby množina hladin (energetických ploch) funkce  $H$  byla kompaktní.

Poznámka 7: každá omezená množina prvků  $n$ -dimenzionálního eukleidovského prostoru  $E^n$  s obvyklou definicí vzdáleností dvou prvků prostoru má tu vlastnost, že lze z každé posloupnosti utvořené z jejích prvků vybrat podposloupnost konvergující v  $E^n$ . Je-li navíc uvažovaná množina uzavřená, takže k ní patří všechny její hromadné body, je v  $E^n$  kompaktní.

Důležitým případem zobecněných kanonických rovnic jsou tzv. symetrizované systémy zavedené Obuchovem [6]. Systém nazýváme symetrizovaným, jestliže jeho pohybové rovnice mohou být zapsány ve tvar

$$\dot{x}_j = \sum_k m_{jk} \frac{\partial F}{\partial x_k},$$

kde je  $\mathbf{M} = (m_{jk})$  čtvercová regulární matice a  $F$  charakteristická funkce systému. S jednoduchým příkladem symetrizovaného systému jsme se setkali již dříve. Byl to kanonický triplet:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= px_2x_3, & \dot{x}_2 &= qx_3x_1, & \dot{x}_3 &= rx_1x_2; \\ p+q+r &= 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Jak již bylo řečeno, v obecném případě zapsané pohybové rovnice tripletu v jistém ortogonálním souřadnicovém systému závisící na pěti parametrech jsou ekvivalentní Eulerovým rovnicím rotujícího tuhého tělesa. Výsledky popsané Eulerem byly získány v případě grupy  $SO(3)$ , tj. grupy rotací trojdimenzionálního eukleidovského prostoru, tedy konfiguračního prostoru tuhého tělesa upevněného v bodě. Eulerovský pohyb tuhého tělesa je možno chápat jako pohyb po geodetice na grupě  $SO(3)$  s levoinvariantní Riemannovou metrikou (viz poznámky 9 a 10) a protože značná část Eulerovy teorie je spojena jen s touto invariancí, lze ji „převést“ na případ dalších grup. Pak hovoříme o Eulerových rovnicích zobecněného tuhého tělesa a o jeho pohybu po geodetice na konečnědimenzionální Lieově grupě. Jestliže přihlídneme k principu nejmenší akce, který z pozice matematicky je vlastně definicí dokonalé (ideální) tekutiny, můžeme říci, že proudění ideální tekutiny v jisté oblasti  $D$  se děje po geodetice na grupě  $SDiffD$  – grupě difeomorfismů oblasti  $D$ , zachovávajících element objemu.

Matice  $\mathbf{A} = (\partial\dot{x}_i / \partial x_j)$  systému (3.1) (matice stability) nabývá tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & px_3 & px_2 \\ qx_3 & 0 & qx_1 \\ rx_2 & rx_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Symetrie druhých parciálních derivací  $\partial^2 F / \partial x_i \partial x_j = \partial^2 F / \partial x_j \partial x_i$  má stejný význam jako symetrie matice  $\mathbf{MA}$ , kde  $\mathbf{M} = \mathbf{m}^{-1}$  je inverzní matice. Z rovnosti  $(MA)_{ij} = (MA)_{ji}$  (pro  $i \neq j$ ) dostáváme, že  $M_{ij} = 0$ ,  $qM_{22} = pM_{11}$ ,  $rM_{33} = pM_{11}$ . Hledaná matice  $\mathbf{m}$  je úměrná diagonální matici s prvky  $m_{11} = p$ ,  $m_{22} = q$ ,  $m_{33} = r$ . Charakteristická funkce  $F$  systému (3.1) je úměrná  $x_1x_2x_3$ .

Vlastnost dynamického systému „být symetrizovaný“ je strukturální vlastností, nezávisící na volbě lineárních souřadnic a je tedy ekvivalentní existenci nedegenerované reálné matice  $\mathbf{M}$ , pro kterou je matice  $\mathbf{M}(\partial\dot{x}_i / \partial x_j)$  maticí symetrickou.

Poznamenejme, že je to třída systémů hydrodynamického typu, v níž strukturálními vlastnostmi jsou kvadratická nelinearita, regularita, tj. a také  $\partial\dot{x}^i / \partial x^i = 0$  existence pozitivně definitního kvadratického prvého integrálu. Již dříve (odst. 2.1) jsme uvedli, že regularita implikuje lineární vazby mezi

koeficienty pravých stran (2.1), které nemohou být zesíleny doplňujícími vztahy nezávisle na volbě lineárních souřadnic.

Hovoříme-li o symetrizovaných systémech, zároveň máme na mysli existenci symetrického (příp. antisymetrického) symetrizátoru a pak jde o tzv.  $\Theta$ -systémy (příp. tzv.  $H$ -systémy); přidržujeme se zde terminologie zavedené v [6].

Kvadraticky nelineární regulární  $\Theta$ -systém s maticí symetrizátoru, kterou je matice inverzní k matici kvadratické formy  $B = (1/2)(\partial\dot{x}^i / \partial x^j)(\partial\dot{x}^j / \partial x^i)$ , nazvěme  $B$ -systémem. Příkladem takového systému je kanonický triplet (2.9). Dodejme, že každý  $B$ -systém v trojdimenzionálním fázovém prostoru je ekvivalentní buď kanonickému tripletu, nebo integrabilnímu  $B$ -systému, jehož všechny trajektorie se v konečném čase vzdálí (expandují) do nekonečna. Lze předpokládat, že v tomto případě systém z fyzikálního hlediska „přestane pracovat“.

Věnujme dále pozornost invariantní formulaci třídy symetrizovaných systémů. Spojujeme s ní existenci regulární bilineární formy v prostoru  $(\mathbb{R}^n)^*$  duálnímu k lineárnímu prostoru  $\mathbb{R}^n$  a také jisté reálné charakteristické funkce  $F$ , jak o tom vypovídá následující věta:

Dynamický systém

$$\dot{x}^i = f^i(x) \quad (3.2)$$

v oblasti  $U$  lineárního prostoru  $\mathbb{R}^n$  nazvěme symetrizovaný, existuje-li regulární bilineární forma  $S(\xi, \eta)$  v  $(\mathbb{R}^n)^*$  (mající konstantní reálné koeficienty) a reálná charakteristická funkce  $F$  takové, že hodnota libovolné lineární formy  $\xi \in (\mathbb{R}^n)^*$  na vektoru  $\dot{x}(a)$  se pro všechna  $a \in U$  shoduje s hodnotou  $S(\xi, \nabla_a F)$ . Zde je  $\nabla_a F$  gradient  $F$  v bodě  $a$  (lineární forma na  $\mathbb{R}^n$  s koeficienty, kterými jsou prvky parciální derivace funkce  $F$ ).

V pevně zvoleném systému lineárních souřadnic  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  na  $\mathbb{R}^n$  bilineární forma  $S(\xi, \eta) = \sum S^{ij} \xi_i \eta_j$  a symetrizovaný systém (3.2) se symetrizátorem  $S(\xi, \eta)$  a charakteristickou funkcí  $F$  budou mít tvar

$$\xi_i \dot{x}^j = \xi_i S^{ij} (\partial F / \partial x^j), \quad \dot{x}^i = \sum S^{ij} (\partial F / \partial x^j). \quad (3.3)$$

Pokud lze systém (3.2) přepsat do (3.3) se symetrickým (antisymetrickým) regulárním symetrizátorem  $S^{ij} = S^{ji}$ ,  $S(\xi, \eta) = S(\eta, \xi)$  ( $S(\xi, \eta) = -S(\eta, \xi)$ ,  $S^{ij} = -S^{ji}$ ), hovoříme o  $\Theta$ -systému ( $H$ -systému). Protože libovolná antisymetrická bilineární forma existuje v prostorech se sudou dimenzí, s  $H$ -systémy se setkáváme jen v  $\mathbb{R}^{2n}$ . Je to právě systém lineárních kanonických

souřadnic  $(q_i, p_i)$  ve fázovém prostoru  $\mathbb{R}^{2n}$ , v nichž daný  $H$ -systém má tvar Hamiltonových kanonických rovnic  $\dot{q}_j = \partial H / \partial p_j$ ,  $\dot{p}_j = -\partial H / \partial q_j$ .

Kromě kanonického tripletu je důležitým příkladem  $\Theta$ -systému model vzniklý superpozicí tripletu popisující kaskádní proces přenosu energie v turbulentním toku [5,6,7]. Píšeme

$$\begin{aligned}\dot{v}_0 &= p_0(v_1^2 - v_2^2), \\ \dot{v}_\alpha &= (-1)^{\alpha_m} p_{m-1} v_\alpha v_{\alpha_-} + \sum_{j=1,2} p_m (-1)^{1+j} v_{(\alpha,j)}^2,\end{aligned}\quad (3.4)$$

kde je  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ ,  $\alpha_- = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1})$ ,  $(\alpha, j) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, j)$ ,  $v_\alpha \equiv 0$  pro  $m > N$ . V systému souřadnic  $v_\alpha$  rovnice (3.4) připouštějí zavedení diagonálního symetrizátoru

$$\dot{v}_\alpha = (-2)^{-m} \partial F / \partial v_\alpha,$$

v němž  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  a charakteristická funkce  $F$  má tvar

$$F = p_0 v_0 (v_1^2 - v_2^2) + \sum_{m=2,3,\dots,N} \sum_{\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)} 2^{m-1} (-1)^{\alpha_m+m} p_{m-1} v_\alpha^2 v_{\alpha_-}.$$

Snad se o tom přesvědčíme, neboť

$$\begin{aligned}(-2)^{-m} \frac{\partial F}{\partial v_\alpha} &= (-2)^{-m} 2^m (-1)^{\alpha_m+m} p_{m-1} v_\alpha v_{\alpha_-} + \\ &+ (-2)^{-m} 2^m \sum_{j=1,2} (-1)^{j+(m+1)} p_m v_{(\alpha,j)}^2 = \dot{v}_\alpha.\end{aligned}$$

Je proto (3.4)  $\Theta$ -systémem.

Povšimněme si, že systém typu (3.2) s kvadratickými pravými stranami určuje kvadratickou formu  $B(\mathbf{x})$  ve tvaru

$$B(\mathbf{x}) = 2^{-1} \sum_{i,j} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \frac{\partial f^j}{\partial x^i}$$

a to nezávisle na výběru lineárních souřadnic v  $\mathbb{R}^n$ . Uvážíme-li soustavu (3.4), můžeme psát

$$B(\mathbf{v}) = p_0^2 v_0^2 + \sum_{1 \leq m \leq N} \sum_{\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)} (p_m^2 - 2p_{m-1}^2) v_\alpha^2; \quad p_{N+1} = 0.$$

Systém (3.4) má pozitivně definitní kvadratický první integrál  $E(\mathbf{v}) = 2^{-1}(v_0^2 + \sum v_\alpha^2)$ . K tomu poznamenejme, že v systému souřadnic  $v_\alpha$  existuje diagonální symetrizátor systému (3.4) a ve zvolených souřadnicích  $v_\alpha$  je kvadratická forma  $B(\mathbf{v})$  převedena na formu diagonálního tvaru (matice takové formy je diagonální) v Eukleidově prostoru se skalárním součinem daným pozitivně definitní kvadratickou formou  $E$ . Ukazuje se, že takový souřadnicový systém existuje pro libovolný  $\Theta$ -systém s kvadratickými pravými stranami a kvadratickým prvním integrálem.

Z přítomnosti nedegenerované bilineární formy  $S(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$  vyplývá, že existuje jediný vektor  $S_1 \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$  takový, že pro všechna  $\boldsymbol{\eta} \in (\mathbb{R}^n)^*$  hodnota  $(\boldsymbol{\eta}, S_1 \boldsymbol{\xi})$  lineární formy  $\boldsymbol{\eta}$  se na vektoru  $S_1 \boldsymbol{\xi}$  shoduje s  $S(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ . Analogicky existuje jediný vektor  $S_2 \boldsymbol{\eta}$  takový, že  $S(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = (\boldsymbol{\xi}, S_2 \boldsymbol{\eta})$  pro libovolné  $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^*$ . Lineární operátory  $S_j$  ( $j = 1, 2$ ) definují izomorfismus lineárních prostorů  $(\mathbb{R}^n)^*$  a  $\mathbb{R}^n$  a proto se zde setkáváme s jednoznačným operátorem  $S_j^{-1}$ , inverzním k operátoru  $S_j$ . Z bilineární formy  $S$  na  $(\mathbb{R}^n)^*$  dostaneme bilineární formu na  $\mathbb{R}^n$ , neboť  $s_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (S_j^{-1} \mathbf{x}, \mathbf{y})$  je hodnota lineární formy  $S_j^{-1} \mathbf{x}$  na vektoru  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . V případě  $\Theta$ -symetrizátoru máme  $S(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = S(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$ ,  $s_1 = s_2 = s$ . V systému lineárních souřadnic  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  na  $\mathbb{R}^n$  a systému lineárních souřadnic  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  na  $(\mathbb{R}^n)^*$ , je matice formy  $s$  inverzní k matici  $\mathbf{S} = (S^{ij})$ ;  $\mathbf{s} = \mathbf{S}^{-1}$ . Jedná-li se o  $H$ -symetrizátor  $S(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = -S(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$ , dostáváme  $s_1 = -s_2$ .

Ve fázovém prostoru  $\mathbb{R}^n$   $\Theta$ -systému s  $\Theta$ -symetrizátorem je určena kvadratická forma  $\Theta(\mathbf{x}) = 2^{-1}s_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 2^{-1}s_2(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ . Předpokládejme, že charakteristická funkce  $\Theta$ -systému je homogenní funkcí stupně  $(m+1)$ . Tehdy máme  $d\Theta/dt = s_2(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = (S_2^{-1} \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$ ,  $S(\boldsymbol{\xi}, S_2^{-1} \dot{\mathbf{x}}) = (\boldsymbol{\xi}, \dot{\mathbf{x}}) = S(\boldsymbol{\xi}, \Delta_{\mathbf{x}} F)$  a to pro libovolné  $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^*$ . Protože forma  $S$  je regulární, dostáváme  $S_2^{-1} \dot{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} F$  a tedy

$$\frac{d\Theta}{dt} = (\nabla_{\mathbf{x}} F, \mathbf{x}) = \sum_j x_j \frac{\partial F}{\partial x_j} = (m+1)F, \quad (3.5)$$

přihlédneme-li k Eulerovu teorému o derivacích homogenních funkcí. V případě kvadraticky nelineárního  $\Theta$ -systému máme

$$F = \frac{1}{3} \frac{d\Theta}{dt}. \quad (3.6)$$

Při daném  $\Theta$ -symetrizátoru  $S(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = S(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$ , s maticí  $(\Theta^{ij})$ ,  $\Theta^{ij} = \Theta^{ji}$ , můžeme určit diferenciální operátor nezávisle na volbě systému lineárních



souřadnic  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  a následně Laplaceův operátor  $\Delta = \sum_{i,j} \Theta^{ij} (\partial^2 / \partial x^i \partial x^j)$ .

Systém nazýváme regulární, zachová-li element fázového prostoru:  $\sum \partial \dot{x}^i / \partial x^i \equiv 0$ . Pro regulární  $\Theta$ -systémy (se symetrizátorem  $(\Theta^{ij})$ ) je charakteristická funkce  $F$  harmonickou funkcí pro operátor  $\Delta$ :

$$0 \equiv \sum_i \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^i} = \sum_{i,j} \Theta^{ij} \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} = \Delta F. \quad (3.7)$$

Vztahy (3.5) až (3.7) byly získány Obuchovem [6]. V citované práci je zároveň definována bilineární operace v  $\Theta$ -systému s daným  $\Theta$ -symetrizátorem  $S$ , která je analogická Poissonově závorce hamiltonovských systémů:

$$[K, F](\mathbf{x}) = (\nabla_{\mathbf{x}} K, \dot{\mathbf{x}}_F) = \sum_j (\partial K / \partial x^j) \dot{x}_F^j.$$

Zde je  $\dot{\mathbf{x}}_F$  vektorové pole určené pohybovými rovnicemi systému a charakteristickou funkcí  $F$ ,  $(\boldsymbol{\xi}, \dot{\mathbf{x}}_F) = S(\boldsymbol{\xi}, \nabla_{\mathbf{x}} F)$  pro libovolné  $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbb{R}^n)^*$ . Platí  $[K, F](\mathbf{x}) = [F, K](\mathbf{x})$  a je-li  $K$  prvním integrálem systému  $\dot{\mathbf{x}}_F$ , pak je  $F$  prvním integrálem systému  $\dot{\mathbf{x}}_K$ , tj.

$$0 = (\nabla_{\mathbf{x}} K, \dot{\mathbf{x}}_F) = [K, F](\mathbf{x}) = [F, K](\mathbf{x}) = (\nabla_{\mathbf{x}} F, \dot{\mathbf{x}}_K).$$

Uvedme příklad disipativního systému, který bude symetrizujícím po nelineární záměně proměnných. Je převzat z [6] a je spojován se jménem Volterrovým [10]. Lze ho napsat ve tvaru

$$\frac{dN_j}{dt} = \varepsilon_j N_j + \beta_j^{-1} \sum_{s=1}^n \alpha_{sj} N_s N_j, \quad (3.8)$$

kde jsou  $N_j$  počty jedinců v souboru  $j$ -tého vidu,  $\varepsilon_j$  nenulové konstanty charakterizující rychlost změny  $N_j$ ,  $\beta_j^{-1}$  kladné konstanty a matice koeficientů  $(\alpha_{sj})$  je antisymetrickou regulární maticí (vektor  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  má komponenty s různými znaménky). Ačkoliv rovnice (3.8) původně doznala uplatnění v biologii, Volterra upozornil na její analogii s rovnicemi klasické mechaniky. Provedeme-li záměnu proměnných  $v_j = \ln(N_j/q_j)$ , kde je  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  jediný stacionární bod systému (3.8), v němž  $q_j \neq 0$  (všechna  $q_j > 0$ ), lze (3.8) přepsat do tvaru

$$\frac{dv_j}{dt} = \sum_s (\alpha_{js} / \beta_j \beta_s) (\partial G / \partial v_s); \quad (3.9)$$

$G = \sum_k \beta_k q_k (\exp v_k - v_k - 1)$ . Snadno se o tom přesvědčíme, neboť

$$\begin{aligned} \dot{v}_j &= \varepsilon_j + \beta_j^{-1} \sum_k \alpha_{jk} q_k \exp v_k = \beta_j^{-1} \sum_k \alpha_{jk} (\exp v_k - 1) q_k \\ &= \sum_k (\alpha_{jk} / \beta_j \beta_k) (\partial G / \partial v_k). \end{aligned}$$

Matice  $\alpha = (\alpha_{jk})$  je antisymetrická a regulární. Odtud vyplývá, že (3.9) je  $H$ -systémem s hamiltoniánem  $G$  ( $G(0) = 0$ ) a číslo  $n$  je sudé. Zároveň je  $G$  prvním integrálem systému (3.8). Výrazy (3.8) a (3.9) mohou být zapsány ve tvaru Lagrangeova systému

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{v}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial v_j} = 0$$

s Lagrangeovou funkcí  $L(\mathbf{v}) = 2^{-1} \sum_{j,k} \bar{\alpha}_{jk} v_j \dot{v}_k - G(\mathbf{v})$ , kde je  $(\bar{\alpha}_{jk})$  matice

inverzní k matici  $(\alpha_{jk} / \beta_j \beta_k)$ . Podle [6] je (3.8) pro  $n = 2$  nejen  $H$ -systémem, ale rovněž  $\Theta$ -systémem s charakteristickou funkcí  $F = -\varepsilon_2(\exp v_1 - v_1 - 1) - \varepsilon_1(\exp v_2 - v_2 - 1)$  a formou  $\Theta = v_1 v_2$ .

Budiž v  $\mathbf{R}^n$  zadán  $\Theta$ -systém se  $\Theta$ -symetrizátorem  $S$ , charakteristickou funkcí  $F$  a pozitivně definitním kvadratickým prvním integrálem  $E$ . Pak existuje systém lineárních souřadnic  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  v  $\mathbf{R}^n$  takový, že kvadratická forma  $\Theta$  implikovaná  $S$  má diagonální tvar  $E = 2^{-1}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$ . V takovém souřadnicovém systému v  $\mathbf{R}^n$  má  $\Theta$ -systém diagonální symetrizátor  $\dot{x}_j = \Theta_j(\partial F / \partial x_j)$ . Budiž  $F = \sum_{\mathbf{a}} c_{\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}}$  vytvářející funkce, tedy vytvářející mnohočlen  $(\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n))$  je soubor nezáporných celých čísel,  $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = (x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \dots, x_n^{a_n})$  a  $c_{\mathbf{a}}$  jsou konstanty). Protože systém  $\dot{x}_j = \Theta_j(\partial F / \partial x_j)$  má první integrál  $E = 2^{-1}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$ , bude

$$0 \equiv \dot{E} = \sum_j x_j \dot{x}_j = \sum_j \Theta_j x_j (\partial F / \partial x_j) = \sum_{\mathbf{a}} (\mathbf{a}, \Theta) c_{\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}},$$

kde  $(\mathbf{a}, \Theta) = \sum_j a_j \Theta_j$ . Odtud dostáváme, že  $c_{\mathbf{a}}$  se mohou lišit od nuly jen pro

$\mathbf{a}$  taková, že  $(\mathbf{a}, \Theta) = 0$ .

Vyzvedněme zde skutečnost, že lineární prostor charakteristických funkcí kvadraticky nelineárního  $\Theta$ -systému s daným symetrizátorem  $\dot{x}_j = \Theta_j(\partial F / \partial x_j)$  a kvadraticky pozitivním prvním integrálem  $E = 2^{-1}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$  je generován kubickými formami  $F(i, j) = x_i^2 x_j$  pro

dvojice  $(i, j)$  takové, že  $2\Theta_i + \Theta_j = 0$ ,  $F(i, j, k) = x_i x_j x_k$  pro trojice  $(i, j, k)$  takové, že  $\Theta_i + \Theta_j + \Theta_k = 0$ .

Regulární kvadraticky nelineární  $\Theta$ -systém s pozitivně definitním kvadratickým prvním integrálem nazvěme  $\Theta$ -systémem hydrodynamického typu. Charakteristická funkce  $F$  kvadraticky nelineárního  $\Theta$ -systému  $\dot{x}_j = \Theta_j(\partial F / \partial x_j)$  s prvním integrálem má tvar

$$F = \sum_{2\theta_i + \theta_j = 0} c(i, j)F(i, j) + \sum_{\theta_i + \theta_j + \theta_k = 0} c(i, j, k)F(i, j, k). \quad (3.10)$$

Podmínka regularity  $\sum \partial \dot{x}_i / \partial x_i = 0$  klade následující omezení na koeficienty výrazu (3.10):

$$0 \equiv \sum_i \partial \dot{x}_i / \partial x_i = 2 \sum_{2\theta_i + \theta_j = 0} \Theta_i c(i, j) x_j.$$

Proto pro libovolné  $j$  bude  $\sum_i c(i, j) = 0$ . Poznamenejme, že v případě zadaného kvadraticky nelineárního  $\Theta$ -systému  $\dot{x}_j = \Theta_j(\partial F / \partial x_j)$  s prvním integrálem,  $E = 2^{-1}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$  existuje systém lineárních souřadnic v  $\mathbb{R}^n$  takový, že tato forma  $E$  zachovává svůj tvar, pohybové rovnice lze zapsat opět jako výraz pro  $x_j$  a pro formu  $B$  dostáváme

$$B = 2^{-1} \sum_{i, j} (\partial \dot{x}_j / \partial x_i) (\partial \dot{x}_i / \partial x_j).$$

Podmínky současné redukce forem  $E$ ,  $B$ ,  $\Theta$  na součet čtverců kladou silná omezení na možný tvar  $\Theta$ -symetrizátoru. Více o tom v [6].

Přejdeme nyní k symetrizovanému  $H$ -systému s pozitivně definitním prvním integrálem  $E$ . Poté ve fázovém prostoru  $\mathbb{R}^{2n}$   $H$ -systému existuje systém kanonických nelineárních souřadnic, v němž pohybové rovnice mají tvar systému Hamiltonových rovnic  $\dot{q}_j = \partial F / \partial p_j$ ,  $\dot{p}_j = -\partial F / \partial q_j$  a první integrál píšeme ve tvaru

$$E = 2^{-1} \sum_j \omega_j (p_j^2 + q_j^2), \quad \omega_j > 0. \quad (3.11)$$

Důkaz tohoto tvrzení je proveden v [6].

Podotkněme, že soubor  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  je jednoznačně určen (s přesností až na permutace)  $H$ -symetrizátorem a formou  $E$ . Libovolný  $H$ -systém je regulární. Proto je kvadraticky nelineární  $H$ -systém s pozitivně kvadratickým prvním integrálem  $H$ -systémem hydrodynamického typu. Pro libo-

volný takový systém existuje ve fázovém prostoru  $\mathbb{R}^{2n}$  soubor lineárních souřadnic, v nichž pohybové rovnice mají tvar Hamiltonových kanonických rovnic, pro první integrál platí (3.11) a charakteristická kvadratická forma

$$B = 2^{-1} \sum_{k,j} ((\partial \dot{p}_k / \partial p_j)(\partial \dot{p}_j / \partial p_k) + (2\partial \dot{p}_k / \partial q_j)(\partial \dot{q}_j / \partial p_k) + (\partial \dot{q}_k / \partial q_j)(\partial \dot{q}_j / \partial q_k))$$

přechází na součet čtverců

$$B = 2^{-1} \sum_j b_j (p_j^2 + q_j^2).$$

S důkazem tohoto výroku se můžeme seznámit opět v [6].

Věnujme nyní pozornost normální formě hamiltonovských systémů a formálním prvním integrálům.

Budiž ve fázovém prostoru  $\mathbb{R}^{2n}$  s kanonickými souřadnicemi  $(q_i, p_i)$  zadán hamiltonovský systém  $\dot{q}_j = \partial F / \partial p_j$ ,  $\dot{p}_j = -\partial F / \partial q_j$  s rovnovážnou polohou v počátku souřadnicového systému a libovolným hamiltoniánem  $F$  s kvadratickou částí  $F_2$ , pro níž máme

$$F_2 = 2^{-1} \sum_j \alpha_j (p_j^2 + q_j^2).$$

Nebudeme předpokládat, že  $\alpha_j$  jsou kladné veličiny. Hamiltonián  $F$  nazvěme normální formou podle Gustavsona [11], jestliže jeho normální rozvoj v nulovém bodě

$$F = F_2 + \sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} c_{\mathbf{a}\mathbf{b}} \mathbf{z}^{\mathbf{a}} \mathbf{v}^{\mathbf{b}},$$

( $z_j = p_j = iq_j$ ,  $v_j = p_j - iq_j = \bar{z}_j$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  a  $a_i, a_j$  jsou soubory celých nezáporných čísel,  $\mathbf{z}^{\mathbf{a}} \mathbf{v}^{\mathbf{b}} = z_1^{a_1} z_2^{a_2} \dots z_n^{a_n} v_1^{b_1} v_2^{b_2} \dots v_n^{b_n}$ ,  $c_{\mathbf{a}\mathbf{b}}$  jsou konstanty) obsahuje toliko součet po dvojicích  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  takový, že  $(\mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a}) \equiv \sum_j \alpha_j (b_j - a_j) = 0$  [6] existuje formální změna kanonických proměnných  $P_j = p_j = \bar{P}_j(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ,  $Q_j = q_j = \bar{Q}_j(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , ( $\bar{P}_j, \bar{Q}_j$  neobsahují členy prvního řádu), zachovávající tvar Hamiltonových kanonických rovnic  $\dot{q}_j = \partial F / \partial p_j$ ,  $\dot{p}_j = -\partial F / \partial q_j$  a taková, že v proměnných  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  má hamiltonián  $F$  tvar normální Gustavsonovy formy.

Nechť hamiltonián  $F$  uvedeného tvaru má normální Gustavsonovu formu a všechny číselné vztahy mezi frekvencemi  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  jsou generovány  $h$  lineárně nezávislými vztahy  $(\mathbf{m}_j, \boldsymbol{\alpha}) = \sum m_{jk} \alpha_k = 0$ . Poté má daný

systém  $n$ -h lineárně nezávislých kvadratických integrálů pohybu  $D = \sum d_k z_k \bar{z}_k$  s koeficienty  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  splňujícími podmínku  $(\mathbf{m}_j, \mathbf{d}) = 0$ . V tomto případě  $F$  je integrálem pohybu. Dokonce v případě známého Hénonova a Heilesova hamiltoniánu [12]

$$F = 2^{-1}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2 + 2q_1^2 q_2 - (2/3)q_2^3)$$

řady udávající transformace k novým proměnným  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  (v nichž má  $F$  normální tvar) s velkou pravděpodobností všude v  $\mathbb{R}^4 \setminus 0$  divergují. Pak ovšem ve výchozím systému souřadnic  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  je kvadratický integrál v proměnných  $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$  dán toliko formální řadou. Na druhé straně jsou však známy studie (citujeme podle [6]), podle nichž mnohé trajektorie systému s takovým hamiltoniánem se chovají tak, jako kdyby tento integrál existoval.

### 3.2 Symetrizované komplexní systémy

Jsou to zejména interakce planetárních vln a chování soustav rezonančně vázaných oscilátorů, kde se setkáváme se symetrizovanými systémy a s jejich komplexním zobecněním ve fázovém prostoru.

Systém obyčejných diferenciálních rovnic v oblasti  $U$  fázového prostoru  $\mathbb{R}^{2n}$  nazvěme symetrizovaným komplexním systémem v komplexních lineárních souřadnicích,  $(z^1, z^2, \dots, z^n)$  jestliže existuje analytická charakteristická funkce  $F(\mathbf{z})$  v  $U \subset \mathbb{C}^n$  (množina funkcí  $F(\mathbf{z})$ , jejichž (parciální) derivace do  $n$ -tého řádu včetně jsou spojitě v  $\mathbb{R}^n$ ) a regulární hermitovská matice symetrizátoru  $\mathbf{T} = (T^{\lambda\eta})$  ( $T^{\lambda\eta} = \overline{T^{\eta\lambda}}$  pro  $1 \leq \eta, \lambda \leq n$ ) takové, že platí

$$\dot{z}^\lambda = \sum_{\eta} T^{\lambda\eta} \overline{(\partial F / \partial z^\eta)}. \quad (3.12)$$

Poznámka 8: připomeňme si, že i když hladké funkce mají všechny parciální derivace, svými vlastnostmi se podstatně liší od funkcí analytických, tj. takových funkcí, jež lze v každém bodě jejich definičního oboru rozvinout v mocninnou řadu, která v nějakém okolí tohoto bodu konverguje. Hladká funkce sice má všechny parciální derivace, z nichž můžeme formálně sestavit Taylorovu řadu, ale tato řada může mít i nulový poloměr konvergence nebo může konvergovat k jiné funkci. Jeden z podstatných rozdílů mezi hladkými a analytickými funkcemi spočívá v tom, že má-li analytická funkce  $f$  jedné proměnné definovaná na otevřeném intervalu  $I$  nulové hodnoty na nějaké posloupnosti bodů, která má v  $I$  hromadný bod, pak  $f$  je identicky rovná nule. Pro hladké funkce to zdaleka neplatí. Tento rozdíl se často charakterizuje slovy, že hladké funkce jsou "měkké", zatímco analytické funkce jsou "tvrdé". Vzhledem k tvrdosti analytických funkcí nelze

pomocí nich modelovat "malá vychýlení" či "malé poruchy" různých přírodních a technických soustav, které se v praxi často vyskytují; hladké funkce již k tomu vhodné jsou [13].

Při komplexní lineární záměně souřadnic  $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{z}$  přechází matice symmetrizátoru  $\mathbf{T}_z$  na tvar  $\mathbf{T}_w = \mathbf{A}\mathbf{T}_z\mathbf{A}^*$ . Odtud dostáváme, že pro symmetrizované komplexní systémy existují souřadnice  $(w^1, w^2, \dots, w^n)$  v  $C^n$  takové, že v nich systém má diagonální symmetrizátor (s reálnými  $\Theta^\lambda$ )

$$\dot{w}^\lambda = \Theta^\lambda \overline{(\partial F / \partial w^\lambda)} \quad (3.13)$$

s charakteristickou funkcí stejnou jako v případě (3.12).

Všimněme si závěrů, které plynou z existence symmetrizovaného komplexního systému (3.13) a jeho charakteristické reálné analytické funkce  $F_1(\mathbf{w}) = 2\text{Re}F(\mathbf{w})$ . Dostáváme

$$\dot{w}^\lambda = \Theta^\lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial w^\lambda} = \Theta^\lambda \frac{\partial(F + \bar{F})}{\partial w^\lambda} = \Theta^\lambda \frac{\partial F_1}{\partial w^\lambda} = 2^{-1} \Theta^\lambda \left( \frac{\partial}{\partial p^\lambda} + i \frac{\partial}{\partial q^\lambda} \right) F_1,$$

kde  $w^\lambda = p^\lambda + i q^\lambda$ . Systém (3.13) tedy je  $\Theta$ -systémem

$$\dot{p}^\lambda = 2^{-1} \Theta^\lambda \frac{\partial F_1}{\partial p^\lambda}, \quad \dot{q}^\lambda = 2^{-1} \Theta^\lambda \frac{\partial F_1}{\partial q^\lambda}.$$

Jestliže za jeho hamiltonián zvolíme funkci  $F_2(\mathbf{w}) = -2\text{Im}F(\mathbf{w})$ , máme

$$\dot{w}^\lambda = \Theta^\lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial w^\lambda} = \Theta^\lambda \frac{\partial(\bar{F} - F)}{\partial w^\lambda} = \Theta^\lambda \frac{\partial(i F_2)}{\partial w^\lambda} = 2^{-1} \Theta^\lambda \left( \frac{\partial}{\partial p^\lambda} + i \frac{\partial}{\partial q^\lambda} \right) i F_2,$$

$$w^\lambda = p^\lambda + i q^\lambda, \quad (3.14)$$

$$\dot{p}^\lambda = -2^{-1} \Theta^\lambda \frac{\partial F_2}{\partial q^\lambda}, \quad \dot{q}^\lambda = 2^{-1} \Theta^\lambda \frac{\partial F_2}{\partial p^\lambda}.$$

Odtud vyplývá, že symmetrizovaný komplexní systém (3.13) je  $H$ -systémem a může být zapsán ve tvaru Hamiltonových rovnic. Úhrnem můžeme říci, že symmetrizovaný komplexní systém je  $\Theta H$ -systémem; reálným  $\Theta$ -systémem a  $H$ -systémem. K tomu dodejme, že při existenci jeho pozitivně definitního kvadratického integrálu pohybu  $E$  v systému komplexních lineárních souřadnic  $(w^1, w^2, \dots, w^n)$  v  $C^n$  získáme vyjádření

$$E = 2^{-1}(w_1 \bar{w}_1 + w_2 \bar{w}_2 + \dots + w_n \bar{w}_n) \quad (3.15)$$

a matice symmetrizátoru je diagonální:

$$\dot{w}_j = \Theta_j \frac{\overline{\partial F}}{\partial w_j}. \quad (3.16)$$

Podotkneme, že lineární prostor charakteristických funkcí symetrizovaného komplexního systému s kvadratickou pravou stranou, symetrizátorem (3.16) a pozitivně definitním integrálem pohybu (3.15) je generován kubickou formou  $F(k, j) = w_k^2 w_j$  pro takové dvojice  $(k, j)$ , že  $2\Theta_k + \Theta_j = 0$  a  $F(m, l, h) = w_m w_l w_h$  pro trojici  $(m, l, h)$  ve dvojicích různých čísel takových, že  $\Theta_m + \Theta_l + \Theta_h = 0$ . Kvadraticky nelineární symetrizovaný komplexní systém s pozitivně definitním prvním integrálem  $E$  je systémem hydrodynamického typu, neboť libovolný symetrizovaný komplexní systém je  $H$ -systémem a tedy regulární. Jednodušším systémem hydrodynamického typu (symetrizovaným komplexním systémem) je systém v  $C^2 = \mathbb{R}^4$ :

$$\dot{z}_1 = \overline{z_2}^2 = \frac{\overline{\partial F}}{\partial z_1}, \quad \dot{z}_2 = -2\overline{z_1} \overline{z_2} = -\frac{\overline{\partial F}}{\partial z_2}, \quad (3.17)$$

kde  $F = z_1 z_2^2$ . Pozitivně definitní kvadratický integrál pohybu tohoto systému má tvar  $E = |z_1|^2 + 2^{-1}|z_2|^2$ .

Věnujme dále pozornost automorfismu dynamických systémů na lineárním fázovém prostoru. Automorfismem je lineární zobrazení fázového prostoru, které zachovává daný systém. Množina všech automorfismů dynamického systému tvoří grupu s operací součinu lineárních zobrazení. Systém (3.17) má jednoparametrickou grupu automorfismů

$$z_1 \rightarrow \exp(-2i\varphi)z_1, \quad z_2 \rightarrow \exp(i\varphi)z_2$$

izomorfní grupě  $U(1) = \{\exp(i\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  komplexních čísel s modulem jedna. Platí však i opačné tvrzení: libovolný kvadratický nelineární systém v  $\mathbb{R}^4$  s grupou  $U(1)$  - podgrupou grupy automorfismů s pozitivně definitním kvadratickým integrálem pohybu  $E$ , který nemá lineární první integrály (je nedegenerovaný), může být převeden lineárním zobrazením v  $\mathbb{R}^4$  na systém (3.17). Podotkneme, že s grupou automorfismů  $U(1)$  se setkáváme ve fyzikálních systémech charakterizovaných axiální symetrií, zejména pak v úloze o pohybu tekutiny v kruhovém kanálu.

Než pokročíme dále, všimněme si, že záměna  $w_1 = i\overline{z_2}$ ,  $w_2 = z_2$  ( $w_j = p_j + iq_j$ ) převádí (3.17) na hamiltonovský systém s hamiltoniánem  $\text{Re}(\overline{w_1} w_2^2) = \text{Im}(z_1 z_2^2) = F$ . Dostáváme

$$\dot{w}_1 = i w_2^2 = i \frac{\partial(\bar{w}_1 w_2^2)}{\partial \bar{w}_1} = i \frac{\partial(w_2^2 \bar{w}_1 + \bar{w}_2^2 w_1)}{\partial \bar{w}_1} = i \left( \frac{\partial}{\partial p_1} + i \frac{\partial}{\partial q_1} \right) \text{Re}(-i z_1 z_2^2),$$

$$\dot{w}_2 = -2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = 2 i w_1 \bar{w}_2 = i \frac{\partial(w_2^2 \bar{w}_1 + \bar{w}_2^2 w_1)}{\partial \bar{w}_2} = i \left( \frac{\partial}{\partial p_2} + i \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \text{Re}(-i z_1 z_2^2),$$

$$\dot{p}_1 = -\partial F / \partial q_1, \quad \dot{q}_1 = \partial F / \partial p_1, \quad \dot{p}_2 = -\partial F / \partial q_2, \quad \dot{q}_2 = \partial F / \partial p_2.$$

Komplexním tripletem nazýváme symmetrizovaný komplexní systém, komplexní rozšíření kanonického tripletu

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\bar{z}_2 \bar{z}_3, \quad \dot{z}_2 = \bar{z}_3 \bar{z}_1, \quad \dot{z}_3 = -\bar{z}_1 \bar{z}_2, \\ \dot{z}_1 &= -\frac{\partial(z_1 z_2 z_3)}{\partial z_1}, \quad \dot{z}_2 = \frac{\partial(z_1 z_2 z_3)}{\partial z_2}, \quad \dot{z}_3 = -\frac{\partial(z_1 z_2 z_3)}{\partial z_3}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Stále se přidržující terminologie zavedené v [6] můžeme říci, že (3.18) je dříve popsaným  $\mathcal{O}H$ -systémem, tedy reálným  $\mathcal{O}$ -systémem a  $H$ -systémem. Po záměně proměnných  $w_1=z_1$ ,  $w_2=\bar{z}_2$ ,  $w_3=z_3$  ( $w_j = p_j + i q_j$ ) přechází (3.18) na hamiltonovský systém s hamiltoniánem  $F = \text{Im}(w_1 \bar{w}_2 w_3)$ :

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= -w_2 w_3 = \frac{\partial(w_1 \bar{w}_2 w_3 - \bar{w}_1 w_2 \bar{w}_3)}{\partial \bar{w}_1} = i \left( \frac{\partial}{\partial p_1} + i \frac{\partial}{\partial q_1} \right) F, \\ \dot{p}_1 &= -\frac{\partial F}{\partial q_1}, \quad \dot{q}_1 = -\frac{\partial F}{\partial p_1}, \\ \dot{w}_2 &= w_1 w_3 = \frac{\partial(w_1 \bar{w}_2 w_3 - \bar{w}_1 w_2 \bar{w}_3)}{\partial \bar{w}_2} = i \left( \frac{\partial}{\partial p_2} + i \frac{\partial}{\partial q_2} \right) F, \\ \dot{w}_3 &= -\bar{w}_1 w_2 = \frac{\partial(w_1 \bar{w}_2 w_3 - \bar{w}_1 w_2 \bar{w}_3)}{\partial \bar{w}_3} = i \left( \frac{\partial}{\partial p_3} + i \frac{\partial}{\partial q_3} \right) F. \end{aligned}$$

Systém (3.18) má dva nezávislé kvadratické první integrály  $E = 2^{-1}(z_1 \bar{z}_1 + 2z_2 \bar{z}_2 + z_3 \bar{z}_3)$ ,  $S = (z_1 \bar{z}_1 - z_3 \bar{z}_3)$  a dále kubický integrál pohybu  $F = \text{Im}(z_1 z_2 z_3)$ . Systém (3.18) zůstává zachován po transformaci ( $\varphi_j$  jsou reálné konstanty)

$$z_j \rightarrow z_j \exp(i\varphi_j), \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0.$$

Jestliže  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)_1 = (\varphi_1, -2\varphi_1, \varphi_1)$  a  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)_2 = (-\varphi_3, 0, \varphi_3)$ , grupa automorfismů systému (3.18) obsahuje podgrupu  $U(1) \times U(1)$ , kde  $U(1) =$



$= \{\exp i\varphi\}$ , tj. množina všech nenulových komplexních čísel s modulem jedna a s obyčejným násobením. Vezměme dále v úvahu tzv. regulární operaci (akci)  $A(\varphi_1, \varphi_2)$  grupy  $U(1) \times U(1) = \{\exp i\varphi_1, \exp i\varphi_2\}$  vytvořenou lineárními zobrazeními prostoru  $\mathbb{R}^n$ , tedy reprezentaci této grupy s vlastnostmi popsanými v [6]. S  $A(\varphi_1, \varphi_2)$  se setkáváme při analýze kvadratických nelineárních systémů v  $\mathbb{R}^6$ .

Nechť takový systém v  $\mathbb{R}^6$  splňuje následující podmínky:

1. Systém má podgrupu své grupy automorfismů, izomorfní  $U(1) \times U(1)$ , regulárně působící v  $\mathbb{R}^6$  izomorfně daného systému;
2. Systém je regulární (nedegenerovaný), nemá tedy lineární integrály;
3. Systém má pozitivně definitní kvadratický integrál pohybu  $E$ .

Pak platí, že takový systém může být převeden lineárními zobrazeními v  $\mathbb{R}^6$  na systém, který je analogický komplexnímu tripletu (3.18).

Proveďme zde důkaz tohoto tvrzení, k čemuž nám napomůže výše zavedená operace  $A(\varphi_1, \varphi_2)$ .

Bez újmy obecnosti lze zaměnit  $E$  jeho střední hodnotou  $E_0$  branou přes operaci  $U(1) \times U(1)$  v  $\mathbb{R}^6$ . Forma  $E_0$  je invariantním pozitivně definitním kvadratickým integrálem pohybu systému. Grupa  $U(1) \times U(1)$  působí v  $\mathbb{R}^6$  ortogonálními zobrazeními vzhledem k skalárnímu součinu zadávajícímu  $E_0$ . Prostor  $\mathbb{R}^6$  si můžeme představit jako direktní součet třech dvojdimenzionálních podprostorů  $\mathbb{R}_1^2 \oplus \mathbb{R}_2^2 \oplus \mathbb{R}_3^2$ , invariantních vůči operaci  $U(1) \times U(1)$  automorfismy daného systému a ve dvojicích ortogonálních vůči skalárnímu součinu zadávajícímu  $E_0$ . V každém z těchto podprostorů  $\mathbb{R}_j^2$  zavedeme komplexní souřadnice  $z_j = p_j + iq_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ;  $E_0 = \sum (x_j^2 + y_j^2)$ ), převádějící  $\mathbb{R}_j^2$  v jednodimenzionální komplexní prostor  $C_j^1$ . Operace  $A(\varphi_1, \varphi_2)$  grupy  $U(1) \times U(1)$  v  $C^3 = C_1^1 \oplus C_2^1 \oplus C_3^1$  automorfismy daného systému je dána dvěma soubory  $(m_1, m_2, m_3)$ ,  $(n_1, n_2, n_3)$  proměnných (celých čísel):  $A(\varphi_1, \varphi_2)$  převádí  $(z_1, z_2, z_3)$  v  $(\exp(i(m_1\varphi_1 + n_1\varphi_2))z_1, \exp(i(m_2\varphi_1 + n_2\varphi_2))z_2, \exp(i(m_3\varphi_1 + n_3\varphi_2))z_3)$ . Protože operace  $A(\varphi_1, \varphi_2)$  grupy  $U(1) \times U(1)$  je regulární, vektory  $(m_1, m_2, m_3)$  a  $(n_1, n_2, n_3)$  jsou lineárně nezávislé. V souřadnicích  $(z_1, z_2, z_3)$  lze pohybové rovnice uvažovaného systému zapsat ve tvaru

$$\dot{z}_h = \sum_{j,k} (a_{jk}^h \bar{z}_j z_k + b_{jk}^h \bar{z}_j \bar{z}_k + c_{jk}^h z_j \bar{z}_k), \quad (3.19)$$

kde  $1 \leq h, j, k \leq 3$ ,  $a_{jk}^h = a_{kj}^h$ ,  $b_{jk}^h = b_{kj}^h$ . Rovnice (3.19) jsou invariantní vůči operaci  $A(\varphi_1, \varphi_2)$ . Platí:

$$\begin{aligned}
a_{jk}^h &= 0, \text{ jestliže } m_j + m_k - m_h \neq 0, \text{ nebo } n_j + n_k - n_h \neq 0; \\
b_{jk}^h &= 0, \text{ jestliže } m_j + m_k + m_h \neq 0, \text{ nebo } n_j + n_k + n_h \neq 0; \\
c_{jk}^h &= 0, \text{ jestliže } m_j - m_k - m_h \neq 0, \text{ nebo } n_j - n_k - n_h \neq 0.
\end{aligned}$$

Uvedenými údaji je popsána skutečnost, že existuje trojice celých čísel  $(j, k, h)$ ,  $1 \leq j, k, h \leq 3$  taková, že platí jedna z následujících podmínek:

$$\begin{aligned}
m_j + m_k - m_h &= 0 \text{ a } n_j + n_k - n_h = 0; \\
m_j + m_k + m_h &= 0 \text{ a } n_j + n_k + n_h = 0; \\
m_j - m_k - m_h &= 0 \text{ a } n_j - n_k - n_h = 0.
\end{aligned}$$

Uvážíme-li regularitu operace  $A(\varphi_1, \varphi_2)$ , mezi sloupci matice s dvěma řádky  $(m_1, m_2, m_3)$  a  $(n_1, n_2, n_3)$  existuje právě jeden lineární vztah a každý sloupec této matice je nenulový. Po možných záměnách některých  $z_j$  veličinami  $\bar{z}_j$  a přečíslování proměnných se dostáváme k jednomu ze vztahů

$$\begin{aligned}
m_1 + m_2 + m_3 &= 0 \text{ a } n_1 + n_2 + n_3 = 0, \\
m_1 + 2m_2 &= 0 \text{ a } n_1 + 2n_2 = 0.
\end{aligned}$$

S přihlédnutím k prvému z těchto vztahů systém (3.19) nabývá tvaru

$$\dot{z}_1 = b_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3, \quad \dot{z}_2 = b_2 \bar{z}_3 \bar{z}_1, \quad \dot{z}_3 = b_3 \bar{z}_1 \bar{z}_2. \quad (3.20)$$

Povšimněme si, že do třídy takových systémů patří komplexní triplet, vystupující v úloze o rezonanční interakci planetárních vln. Tím je důkaz proveden.

Dodejme, že forma  $E_0 = (z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_3 \bar{z}_3)$  je integrálem pohybu systému (3.20) a poté  $b_1 + b_2 + b_3 = 0$  (všechna  $b_j \neq 0$ ). Po záměně proměnných  $w_j = \exp(i\varphi_j)z_j$ ,  $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = -\arg b_2$  bude konstanta  $b_2$  v (3.20) reálná a kladná ( $b_2 = -(b_1 + b_3)$ ). Zaměříme-li tentokrát pozornost ke druhému ze vztahů, systém (3.19) přejde na

$$\dot{z}_1 = b_1 \bar{z}_2^2, \quad \dot{z}_2 = b_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \dot{z}_3 = 0; \quad b_1 + b_2 = 0. \quad (3.21)$$

Tento systém není regulární - má lineární integrál  $z_3$ . V podprostoru  $z_3 = 0$  jsou systémy (3.21) a (3.17) ekvivalentní.

Zastavme se nyní u hamiltonovského systému  $n$  nelineárních vázaných oscilátorů s hamiltoniánem

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + H_3(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \dots \quad (3.22)$$

v oblasti  $D \subset \mathbb{R}^{2n}$ ,  $0 \in D$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ,  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ ;  $H_j$  je homogenní polynom stupně  $j$  v proměnných  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ :

$$H_j(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2^{-1} \sum_j \omega_j (p_j^2 + q_j^2), \quad \omega_j > 0.$$

Vlastní frekvence  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  vyhovují rezonančnímu vztahu řádu  $k > 0$ , jestliže existuje soubor celých čísel  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  takový, že platí  $\sum k_j \omega_j = 0$ ,  $\sum |k_j| = k$ .

Uvažme případ, kde jediným rezonančním vztahem třetího řádu mezi frekvencemi  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  je relace  $\omega_1 = 2\omega_2$ . Tehdy existuje kanonická transformace  $P_j = p_j + \tilde{P}_j(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ,  $Q_j = q_j + \tilde{Q}_j(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  ( $\tilde{P}$ ,  $\tilde{Q}$  neobsahují lineární členy), která zachovává tvar Hamiltonových rovnic a taková, že hamiltonián (3.22) nabývá tvaru

$$H = 2^{-1} \sum_j \omega_j z_j \bar{z}_j = a \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2^2) + R(P, Q),$$

kde  $z_j = P_j + iQ_j$ ,  $a$  je reálná konstanta a  $R$  obsahuje toliko členy s  $P$ ,  $Q$  a to stupně nejméně čtvrtého. Pro  $a \neq 0$  je modelovým hamiltoniánem systému oscilátorů funkce

$$F_2 = 2^{-1} \omega_2 (2z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2) + a \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2^2). \quad (3.23)$$

Tato funkce popisuje systém dvou vázaných oscilátorů ve fázovém prostoru  $\mathbb{R}^4$ .

Jestliže  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  bude jediným rezonančním vztahem třetího řádu mezi veličinami  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , lze zavést kanonické souřadnice  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  ( $z_j = P_j + iQ_j$ ) takové, že hamiltonián (3.22) má tvar

$$H = 2^{-1} \sum_j \omega_j z_j \bar{z}_j + a \operatorname{Re}(z_1 z_2 \bar{z}_3) + R(\mathbf{P}, \mathbf{Q}).$$

Pokud  $a \neq 0$ , modelový hamiltonián systému s takovou rezonancí můžeme zapsat takto:

$$F_3 = 2^{-1} (\omega_1 z_1 \bar{z}_1 + \omega_2 z_2 \bar{z}_2 + \omega_3 z_3 \bar{z}_3) + a \operatorname{Re}(z_1 z_2 \bar{z}_3), \quad (3.24)$$

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2.$$

S hamiltoniánem (3.24) spojujeme systém tří rezonančně vázaných oscilátorů.

Přejdeme k systému s hamiltoniánem (3.22) a kanonickými souřadnicemi  $p_j, q_j$  ( $z_j = p_j + iq_j$ ). Pak bude ( $\omega_1 = 2\omega_2$ )

$$\dot{z}_1 = i\omega_1 z_1 + iaz_2^2, \quad \dot{z}_2 = i\omega_2 z_2 + 2iaz_1 \bar{z}_2.$$

Další krok spočívá v separaci v čase lineární části proměnných  $z_j$ . Dostáváme

$$u_j = \exp(-i\omega_j t) z_j, \quad \dot{u}_j = (-i\omega_j z_j + \dot{z}_j) \exp(-i\omega_j t), \quad \dot{u}_1 = iau_2^2, \quad \dot{u}_2 = 2iau_1 \bar{u}_2. \quad (3.25)$$

Jestliže nyní provedeme transformaci  $v_1 = iau_1, v_2 = au_2$ , rovnice (3.25) nabývají tvaru (3.17), tj.

$$\dot{v}_1 = \bar{v}_2^2, \quad \dot{v}_2 = -2\bar{v}_1 \bar{v}_2. \quad (3.26)$$

S přihlédnutím k zápisu  $w_1 = v_1, w_2 = \bar{v}_2$  je (3.26) hamiltonovský systém s hamiltoniánem  $F = \text{Im}(\bar{w}_1 w_2^2)$ . S výhodou zde zavedeme kanonické polární souřadnice  $\rho_j, \varphi_j$ :  $|w_j|^2 = 2\rho_j, w_j = |w_j| \exp(i\varphi_j)$ , v nichž  $F = 2^{3/2} \rho_1^{1/2} \rho_2 \sin(2\varphi_2 - \varphi_1)$  a pro rovnice (3.26) máme vyjádření

$$\dot{\rho}_j = -\frac{\partial F}{\partial \varphi_j}, \quad \dot{\varphi}_j = -\frac{\partial F}{\partial \rho_j}.$$

Tehdy

$$\dot{\rho}_1 = 2^{3/2} \rho_1^{1/2} \rho_2 \cos(2\varphi_2 - \varphi_1) = \pm(2^3 \rho_1 \rho_2^2 - F^2)^{1/2}.$$

Systém (3.26) má pozitivní kvadratický integrál pohybu  $E = 2\rho_1 + \rho_2$ . Poté

$$\dot{\rho}_1 = \pm(2^3 \rho_1 (E - 2\rho_1)^2 - F^2)^{1/2}, \quad (3.27)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\partial F}{\partial \rho_1} = 2^{1/2} \rho_1^{-1/2} \rho_2 \sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = 2^{-1} \rho_1^{-1} F; \quad (3.28)$$

$\varphi_1 = 0, w_1(0) = v_1(0)$  je reálné.

Pro  $F = 0$  z rovnice pro  $\dot{\rho}_1$  dostaneme

$$\dot{\rho}_1 = \pm 2^{3/2} \rho_1^{1/2} (E - 2\rho_1) \quad (3.29)$$

a odtud po transformaci  $2\rho_1 = r^2$  ( $r = |w_1| = |v_1|$ ) dospíváme ke vztahu

$$\dot{r} = \pm 2(E - r^2) \quad (3.30)$$

a k obecnému řešení

$$r(t) = \pm(a/2)\operatorname{tgh}a(t - t_0), \quad (3.31)$$

kde  $E = a^2/4$ ,  $a > 0$ .

Podotkněme, že fáze  $\varphi_1$  se skokem mění od hodnoty 0 do  $\pi$  v bodě  $t = t_0$ , kde  $r(t_0) = 0$ . Znaménko v (3.31) volíme tak, aby  $r(t)$  nabývalo kladných hodnot na úseku, v němž  $\varphi_1 = 0$ . Jestliže  $t \rightarrow \infty$ ,  $2\rho_1 = r^2 \rightarrow a^2/4 = E$ .

Docházíme k závěru, že v případě  $F = 0$  se veškerá energie systému v asymptotickém režimu  $t \rightarrow \infty$  „přečerpává“ do prvního oscilátoru a druhý oscilátor je asymptoticky v klidovém stavu – nedochází k výměně energie mezi oscilátory. Po zavedení nových proměnných  $y, f$ :  $2\rho_1 = (a^2/4)y = Ey$ ,  $F = (a^3/2)f$  rovnice (3.29) má tvar

$$y = \pm a(y(1-y)^2 - 4f^2)^{1/2}. \quad (3.32)$$

Protože rovnice (3.29) má integrál pohybu  $E = 2\rho_1 + \rho_2$ ,  $\rho_2 \geq 0$ , bude v (3.32)  $0 \leq y \leq 1$ . Funkce  $y(1-y)^2$  nabývá na úseku  $0 \leq y \leq 1$  maxima v bodě  $y = 3^{-1}$  a jeho hodnota činí  $4 \cdot 3^{-3}$ . Je tedy patrné, že  $|f|_{\max} = 3^{-3/2}$ ,  $|F|_{\max} = 2^{-1}3^{-3/2}a^3$ . Vyjdeme-li z hodnoty  $E = a^2/4$  a položíme-li  $|F| = |F|_{\max}$ , dojdeme ke vztahům  $\dot{y} = 0$ ,  $\rho_1 = 2^{-3}3^{-1}a^2 = \text{konst.}$  Z (3.28) nalezneme, že

$$\dot{\varphi}_1 = 2^{-1}\operatorname{sign}F \frac{2^{-1}3^{-3/2}a^3}{2^{-3}3^{-1}a^2} = 2 \cdot 3^{-1/2}a\operatorname{sign}F = \omega. \quad (3.33)$$

Proto v případě  $|F| = |F|_{\max}$ ,  $\rho_1 = 2^{-3}3^{-1}a^2 = 2^{-3}3^{-1}E$ ,  $\rho_2 = E - 2\rho_1 = 2 \cdot 3^{-1}E$ , systém harmonicky osciluje s frekvencí danou vztahem (3.33) a s poměrem energie prvního a druhého oscilátoru  $\rho_1/\rho_2 = 1/2$ .

Když nyní položíme  $0 < |F| < |F|_{\max}$ , dojde k periodické výměně energie mezi oscilátory. Proměnná  $y$  se v čase  $T/2$  ( $T$  je perioda) změní z hodnoty  $y_1(f)$  na  $y_2(f)$ , kde  $y_1(f)$ ,  $y_2(f)$  jsou řešení rovnice  $y(1-y)^2 - 4f^2 = 0$  v úseku  $(0, 1)$ ;  $|F| = a^3 f/2$ ,  $0 < y_1(f) < 3^{-1} < y_2(f) < 1$ . Z (3.32) dojdeme ke vztahu

$$\frac{T}{2} = a^{-1} \int_{y_1(f)}^{y_2(f)} \frac{dy}{(y(1-y)^2 - 4f^2)^{1/2}}, \quad (3.34)$$

kterým je dána poloviční perioda výměny energie mezi komponentami systému. Je zřejmé, že integrál (3.34) pro  $|f| \rightarrow 0$  monotonně roste a k výměně energie mezi oscilátory dochází aperiodicky při  $F = f = 0$ ,  $T = \infty$  pro  $f = 0$ . Za dobu  $T/2$  se energie prvního oscilátoru změní z hodnoty  $(a^2/4)y_1(f)$  na hodnotu  $(a^2/4)y_2(f)$  a výměna energie je tím větší, čím více se blíží  $|f|$  nulové hodnotě (při pevném  $E$ ). Přihlédneme-li ke kladnému znaménku na pravé straně (3.32), pak integrál

$$t(\rho_1) = a^{-1} \int_{y_1(f)}^{2\rho_1/E} \frac{dy}{(y(1-y)^2 - 4f^2)^{1/2}}$$

monotonně vzrůstá, mění-li se  $\rho_1$  od  $2^{-1}Ey_1(f)$  do  $2^{-1}Ey_2(f)$ . Lze tedy definovat  $\rho_1(t)$  jako funkci inverzní k  $t(\rho_1)$  pro  $0 < t < T/2$ . Z (3.28) dostáváme, že

$$\varphi_1(t) - \varphi_1(0) = F \int_0^t \frac{d\tau}{2\rho_1(\tau)}$$

a to pro  $0 \leq t \leq T/2$ .

Přejdeme k systému s hamiltoniánem  $F_3$  ve tvaru (3.24). V kanonických proměnných  $p_j, q_j$  ( $z_j = p_j + iq_j$ ) pro daný systém máme rovnice

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= i\omega_1 z_1 + i a_1 \bar{z}_2 z_3, \\ \dot{z}_2 &= i\omega_2 z_2 + i a_1 z_3 \bar{z}_1, \\ \dot{z}_3 &= i\omega_3 z_3 + i a_1 z_1 z_2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Odtud ( $u_j = \exp(-i\omega_j t) z_j$ )

$$\dot{u}_1 = i a_1 \bar{u}_2 u_3, \quad \dot{u}_2 = i a_1 u_3 \bar{u}_1, \quad \dot{u}_3 = i a_1 u_1 u_2$$

a po transformaci  $v_1 = a_1 u_1$ ,  $\bar{v}_2 = -i a_1 u_3$ ,  $v_3 = i a_1 u_2$  dospíváme ke komplexnímu tripletu

$$\begin{aligned}
\dot{v}_1 &= -\bar{v}_2 \bar{v}_3, \\
\dot{v}_2 &= \bar{v}_3 \bar{v}_1, \\
\dot{v}_3 &= -\bar{v}_1 \bar{v}_2.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Další transformací  $w_1 = v_1$ ,  $w_2 = \bar{v}_2$ ,  $w_3 = v_3$  převedeme kanonický triplet (3.36) na Hamiltonův systém s hamiltoniánem  $G = \text{Im}(w_1 \bar{w}_2 w_3)$ . Po zavedení polárních souřadnic  $\rho_j$ ,  $\varphi_j$  ( $2\rho_j = |w_j|^2$ ,  $w_j = |w_j| \exp(i\varphi_j)$ ) má (3.36) tvar Hamiltonových rovnic s hamiltoniánem  $G = 2^{3/2}(\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{1/2} \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3)$ :

$$\dot{\rho}_j = -\frac{\partial G}{\partial \varphi_j}, \quad \dot{\varphi}_j = \frac{\partial G}{\partial \rho_j}. \tag{3.37}$$

Systém (3.37) má integrály pohybu ve tvaru  $E_1 = \rho_1 + 2\rho_2 + \rho_3$ ,  $S = \rho_1 - \rho_3$ . Je výhodné přejít k integrálům  $I_1 = \rho_1 + \rho_2 = 2^{-1}(E_1 + S)$ ,  $I_2 = \rho_2 + \rho_3 = 2^{-1}(E_1 - S)$ . Tehdy z (3.37) dostáváme

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_2 &= -\frac{\partial G}{\partial \varphi_2} = 2^{3/2}(\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{1/2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3) = \\
&= \pm(2^3 \rho_1 \rho_2 \rho_3 - G^2)^{1/2} = \pm(2^3(I_1 - \rho_2)(I_2 - \rho_2)\rho_2 - G^2)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Budeme předpokládat, že pro danou trajektorii je  $0 < I_1 \leq I_2$ . V tomto případě  $0 \leq \rho_1(t) \leq I_1$ ,  $0 \leq \rho_2(t) \leq I_1$ ,  $0 \leq \rho_3(t) \leq I_2$ . Funkce  $2^3(I_1 - \rho_2)(I_2 - \rho_2)\rho_2$  proměnné  $\rho_2$  nabývá svého maxima na intervalu  $0 \leq \rho_2 \leq I_1$  v bodě

$$\rho_2^0 = 3^{-1}(I_1 + I_2 - (I_1^2 - I_1 I_2 + I_2^2))^{1/2}.$$

Poté  $|G|_{\max}^2 = 2^3(I_2 - \rho_2^0)(I_2 - \rho_2^0)\rho_2^0$ . Jestliže  $G = 0$ ,  $\rho_j \neq 0$ , máme možnost provést transformaci  $w_j$ :  $w_j \rightarrow w_j \exp(-i\varphi_j(0))$ , zachovávající (3.36), neboť  $\varphi_2(0) = \varphi_1(0) + \varphi_3(0)$ , kde  $w_j = (0)$  a rovněž  $v_j = (0)$  jsou reálné veličiny. V takovém případě z rovnice komplexního tripletu (3.36) dostáváme, že  $w_j = (t)$  je reálnou funkcí pro všechna  $t$  a rovnice (3.36) vedou ke kanonickému reálnému tripletu. Je-li  $|G| = |G|_{\max}$ , komponenty systému harmonicky oscilují s frekvencemi  $\omega_j = \dot{\varphi}_j = (2\rho_j^0)^{-1}G$ , kde  $\rho_1^0 = I_1 - \rho_2^0$ ,  $\rho_3^0 = I_2 - \rho_2^0$ ,  $\rho_j^0 = \text{konst}$  a k výměně energie mezi komponentami nedochází.

Uvažme dále případ  $0 < |G| < |G|_{\max}$ . Tehdy energie každého oscilátoru se periodicky mění. Souřadnice  $\rho_2$  nabývá hodnot od  $R_1(G)$  do  $R_2(G)$ , kde  $R_1$  a  $R_2$  jsou kořeny rovnice v intervalu  $\langle 0, I_1 \rangle$

$$2^3 R(I_1 - R)(I_2 - R) - G^2 = 0$$

a platí  $0 < R_1 < \rho_2^0 < R_2 < I_1$ . V okamžiku, kdy  $\rho_2$  nabývá své maximální hodnoty  $R_2(G)$ , rovněž  $\rho_1$  a  $\rho_3$  dosahují svých maximálních hodnot. Ze zápisu (3.38) máme

$$\frac{T}{2} = \int_{R_1(G)}^{R_2(G)} \frac{d\rho_2}{(2^3(I_1 - \rho_3)(I_2 - \rho_2)\rho_2 - G^2)^{1/2}}, \quad (3.39)$$

kde opět je  $T/2$  poloviční periody oscilací energie příslušných komponent. Při daných  $I_1, I_2$  funkce  $T/2$  monotonně roste při  $|G| \rightarrow 0$ . Pokud  $G = 0$ ,  $I_1 \neq I_2$ , integrál (3.39) nabývá konečné hodnoty. Když  $G = 0$  a  $I_1 = I_2$ , integrál v bodě  $\rho_2 = I_1$  diverguje; pohyb je aperiodický. Jestliže  $G = 0$  a  $I_1 = I_2$ , systém může vykazovat nestabilní rovnovážný stav  $\rho_1 = \rho_2 \equiv 0$ ,  $\rho_2 = \rho_2^0$ ,  $\varphi_2 = \text{konst.}$  Působením malých perturbací takový stav vyústí v režim charakterizovaný pomalou periodickou výměnou energie mezi oscilátory.

Je-li splněna podmínka  $I_1 = I_2$ , trajektorie systému, pro který platí (3.39), lze považovat za trajektorie systému (3.26). Abychom se o tom přesvědčili, uvažme, že při  $I_1 = I_2$  máme  $|v_1(t)| \equiv |v_3(t)|$ . Jestliže v počátečním časovém okamžiku platí  $\rho_1 = \rho_3 = 0$ , existuje posuv fáze proměnných  $v_j$  zachovávající systém (3.36) takový, že  $v_1(0) = v_3(0) \neq 0$ . Provedme transformaci  $v_1 \rightarrow v_3$ ,  $v_3 \rightarrow v_1$ . Když  $v_1(0) = v_3(0)$ , bude  $v_1(t) = v_3(t)$  a pod-prostor zadaný zápisem  $v_1 = v_3$  je invariantním podprostorem systému (3.36). Nyní již postačí omezit rovnice (3.36) na podprostor  $v_1 = v_3$  záměnou  $v_1 = v_3 = 2^{1/2}z_1$ ,  $v_2 = 2z_2$  a dospíváme k systému

$$\dot{z}_1 = -2\bar{z}_1\bar{z}_2, \quad \dot{z}_2 = \bar{z}_1^2.$$



## 4 SYSTÉMY S DVĚMA KVADRATICKÝMI INTEGRÁLY

Systémy hydrodynamického typu, s nimiž se setkáváme při studiu dvojdimenzionálních toků, mají dva kvadratické integrály pohybu. Naším úkolem nyní je popis všech systémů obyčejných diferenciálních rovnic s polynomickými pravými stranami a dvěma kvadratickými integrály pohybu, z nichž jeden je pozitivně definitní [6].

Budiž v  $n$ -dimenzionálním prostoru  $\mathbf{R}^n$  zadán systém rovnic

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

s polynomickými pravými stranami  $f_i$  a kvadratickými integrály  $F_1, F_2$  takovými, že  $F_1$  je pozitivně definitní a vlastní hodnoty formy  $F_2$  s ohledem na skalární součin zadaný  $F_1$  jsou po dvojicích od sebe různé. Tehdy, když  $f_i(x)$  jsou homogenní polynomy  $m$ -tého stupně, (4.1) lze přepsat do tvaru

$$\dot{x}_i = 2^{-1} \sum \varepsilon_{ihkj} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_h} \frac{\partial F_2}{\partial x_k} - \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \frac{\partial F_2}{\partial x_h} \right) p_j(\mathbf{x}), \quad (4.2)$$

kde  $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_{n-3})$  a sčítáme přes všechny permutace  $(i, h, k, \mathbf{j})$  pořadí  $(1, 2, \dots, n)$ , počínající  $i$ ;  $p_j(\mathbf{x})$  jsou homogenní polynomy  $(m-2)$  stupně. Při sudých permutacích souboru  $\mathbf{j}$  polynom  $p_j$  se nemění, při lichých naopak změní znaménko. Dále platí, že soustavu (4.2) máme možnost vyjádřit i takto:

$$\dot{x}_i = 2^{-1} \sum_{h,k} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_h} \frac{\partial F_2}{\partial x_k} - \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \frac{\partial F_2}{\partial x_h} \right) \tilde{p}_{ihk}(\mathbf{x}); \quad (4.3)$$

$\tilde{p}_{ihk}(\mathbf{x})$  jsou homogenní polynomy stupně  $(m-2)$ , antisymetrické vůči permutaci trojice  $(i, h, k)$  (permutaci provádíme na souboru indexů  $i, h, k$  a nikoliv na soustavě proměnných  $x_i, x_h, x_k$ ). Dodejme, že v případě systému

(4.1) kvadraticky nelineárního s polynomy  $\tilde{p}_{ihk}$  nultého stupně, tyto polynomy jsou antisymetrické, provedeme-li permutace indexů  $(i, h, k)$ .

Systém (4.2) s  $p_j(\mathbf{x})$  antisymetrickými při permutaci prováděné v souboru  $(j_1, j_2, \dots, j_{n-3})$  či systém (4.3) má integrály pohybu  $F_1, F_2$ . Opačné tvrzení o možnosti zápisu libovolného systému (4.1) s kvadratickými integrály  $F_1$  a  $F_2$  s polynomickými pravými stranami  $f_i(\mathbf{x})$  ve tvaru (4.2) s polynomy  $p_j(\mathbf{x})$  je třeba dokázat.

Nejprve poznamenejme, že pokud může být systém (4.1) vyjádřen vztahem (4.2) v systému lineárních souřadnic  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , poté tento systém lze převést na tvar (4.2) v libovolném dalším systému nelineárních souřadnic v  $\mathbf{R}^n$ . Proto dostáváme, že v souřadnicích  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  formy  $F_1, F_2$  můžeme zapsat ve tvaru součtu čtverců

$$F_1 = 2^{-1} \sum_j x_j^2, \quad F_2 = 2^{-1} \sum_j \lambda_j x_j^2,$$

v němž jsou  $\lambda_j$  ve dvojicích různá. Všimněme si, že forma  $2F_1$  zadává v  $\mathbf{R}^n$  euklidovskou strukturu. Protože formy  $F_r(\mathbf{x})$ ,  $(r=1, 2)$  jsou integrály pohybu systému (4.1), vektorové pole  $\dot{\mathbf{x}} = \sum \dot{x}_j \partial / \partial x_j$  je tečným polem ploch hladin funkce  $F_r$ ,  $(d_{\mathbf{x}} F_r, \dot{\mathbf{x}}) = 0$ , kde  $d_{\mathbf{x}} F_r$  je gradient funkce  $F_r$ , pokládáný za vektor duálního prostoru. Nadále je třeba se uchýlit k jazyku diferenciálních forem (viz oddíl 13).

Podmínku  $(d_{\mathbf{x}} F_r, \dot{\mathbf{x}}) = 0$ , která nezávisí na výběru euklidovské struktury v  $\mathbf{R}^n$ , vyjádříme ve tvaru

$$0 = (d_{\mathbf{x}} F_r, \dot{\mathbf{x}}) d x_1 \wedge d x_2 \wedge \dots \wedge d x_n = d_{\mathbf{x}} F_r \wedge \omega_{\dot{\mathbf{x}}},$$

kde

$$\omega_{\dot{\mathbf{x}}} = \sum (-1)^{j-1} \dot{x}_j d x_j^{\sim}, \quad d x_j^{\sim} = d x_1 \wedge d x_2 \wedge \dots \wedge d x_{j-1} \wedge d x_{j+1} \wedge \dots \wedge d x_n,$$

$$d_{\mathbf{x}} F_r \wedge \omega_{\dot{\mathbf{x}}} = \sum \dot{x}_j \frac{d F_r}{d x_j} d x_1 \wedge d x_2 \wedge \dots \wedge d x_n.$$

Diferenciální  $(n-1)$ -forma  $\omega_{\dot{\mathbf{x}}}$  je rovna nule při vnějším vynásobení každou z 1-form  $d_{\mathbf{x}} F_1, d_{\mathbf{x}} F_2$ , kde  $d_{\mathbf{x}} F_r = \sum \frac{\partial F_r}{\partial x_j} d x_j$ ; vnější vynásobení diferenciální  $k$ -formy  $\omega = \sum \varphi_j(\mathbf{x}) d x_j$ ,  $j=(j_1, j_2, \dots, j_k)$  funkcí  $d_{\mathbf{x}} F_r$  definujeme zápisem  $\sum \frac{\partial F_r}{\partial x_i} \varphi_j(\mathbf{x}) d x_i \wedge d x_j = d_{\mathbf{x}} F_r \wedge \omega$ . Lze dokázat [14], že pokud

má diferenciální  $k$ -forma polynomicke koeficienty  $\varphi_j(\mathbf{x})$  a  $d_{\mathbf{x}} F_r \wedge \boldsymbol{\omega} = 0$  pro  $r=1, 2$ , pak  $\boldsymbol{\omega} = d_{\mathbf{x}} F_1 \wedge d_{\mathbf{x}} F_2 \wedge \mathbf{p}$ , kde  $(k-2)$  – forma  $\mathbf{p}$  může být vybrána jako forma s polynomickými koeficienty. Nejen to, je-li  $\varphi_j(\mathbf{x})$  homogenní polynom stupně  $m$  a  $d_{\mathbf{x}} F_r \wedge \boldsymbol{\omega} = 0$  pro  $r=1, 2$ , formu  $\boldsymbol{\omega}$  lze vyjádřit ve tvaru  $\boldsymbol{\omega} = d_{\mathbf{x}} F_1 \wedge d_{\mathbf{x}} F_2 \wedge \mathbf{p}$ , kde koeficienty  $(k-2)$  – formy  $\mathbf{p}$  jsou homogenní polynomy stupně  $(m-2)$ . Speciálně forma

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{x}} = d_{\mathbf{x}} F_1 \wedge d_{\mathbf{x}} F_2 \wedge \mathbf{p} = \sum_{h,j,r} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_h} \frac{\partial F_2}{\partial x_r} \right) p_j(\mathbf{x}) dx_h \wedge dx_r \wedge dx_j.$$

Právě odtud dostaneme vztah (4.2) pro systém (4.1).

Abychom se přesvědčili o tom, že systém (4.1) lze zapsat ve tvaru (4.2) (dosavad jsme postupovali obráceně), stačí dokázat toto tvrzení: Necht' diferenciální  $k$ -forma  $\boldsymbol{\omega}$  v  $\mathbb{R}^n$  je formou s koeficienty ve tvaru homogenních polynomů  $m$ -tého stupně taková, že  $d_{\mathbf{x}} F_1 \wedge \boldsymbol{\omega} = d_{\mathbf{x}} F_2 \wedge \boldsymbol{\omega} = 0$ . (Forma  $F_1$  je pozitivně definitní,  $F_2$  má ve dvojicích různé vlastní hodnoty vzhledem k  $F_1$ . Můžeme předpokládat, že  $F_1 = 2^{-1} \sum x_j^2$ ,  $F_2 = 2^{-1} \sum \lambda_j x_j^2$  a  $\lambda_j$  jsou po dvojicích rozdílná). Tehdy diferenciální formu  $\boldsymbol{\omega}$  lze zapsat jako  $\boldsymbol{\omega} = d_{\mathbf{x}} F_1 \wedge d_{\mathbf{x}} F_2 \wedge \mathbf{p}$ , kde je  $\mathbf{p}$  diferenciální  $(k-2)$  – forma s koeficienty zadanými homogenními polynomy stupně  $(m-2)$ . Důkaz tohoto tvrzení je proveden v [6].

## 5 KVADRATICKY NELINEÁRNÍ SYSTÉMY SE DVĚMA INTEGRÁLY

Naznačili jsme, že vztahem (4.2) lze popsat všechny kvadraticky nelineární systémy v  $\mathbb{R}^n$  s dvěma nezávislými kvadratickými integrály  $F_1$  a  $F_2$  takovými, že  $F_1$  je pozitivně definitní a  $F_2$  má po dvojicích vzhledem k  $F_1$  různé vlastní hodnoty. Pohybové rovnice libovolného takového kvadraticky nelineárního systému mohou být zapsány následovně:

$$\dot{x}^i = 2^{-1} \sum_{i_2 \dots i_n} \varepsilon^{i i_2 \dots i_n} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x^{i_2}} \frac{\partial F_2}{\partial x^{i_3}} - \frac{\partial F_1}{\partial x^{i_3}} \frac{\partial F_2}{\partial x^{i_2}} \right) p_{i_4 \dots i_n}, \quad (5.1)$$

kde  $p_{i_4 \dots i_n}$  jsou konstanty.

Z (5.1) dostáváme, že kvadraticky nelineární systémy v  $\mathbb{R}^4$  se dvěma nezávislými kvadratickými integrály mají rovněž lineární první integrál. Tím, že položíme  $n=4$ , máme

$$\dot{x}^i = 2^{-1} \sum_{jkl} \varepsilon^{ijkl} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x^j} \frac{\partial F_2}{\partial x^k} - \frac{\partial F_1}{\partial x^k} \frac{\partial F_2}{\partial x^j} \right) p_i, \quad i = 1, 2, \dots, 4$$

a  $\sum p_i x^i$  je lineární integrál tohoto systému.

Pro  $n=5$  rovnice (5.1) nabývají tvaru

$$\dot{x}^i = 2^{-1} \sum_{jklm} \varepsilon^{ijklm} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x^j} \frac{\partial F_2}{\partial x^k} - \frac{\partial F_1}{\partial x^k} \frac{\partial F_2}{\partial x^j} \right) p_{lm}, \quad i=0, 1, \dots, 4, \quad (5.2)$$

kde  $(p_{im}) = -(p_{mi})$ . Antisymetrická matice  $\mathbf{P} = (p_{lm})$  je řádu nejvýše čtvrtého.

Ukazuje se, že ze třídy systémů (5.2) s integrály  $F_1, F_2$  lze afinně invariantní operací vyčlenit podtřídu regulárních systémů takových, že  $p_{2j} = -p_{j2} = 0$  a systém (5.2) pro  $p_{03} = p_{13} = p_{14} = 0$  přechází na elementární blok kaskádního systému se dvěma integrály  $F_1, F_2$ :

$$\begin{aligned}
x^0 &= p_{34}(\lambda_2 - \lambda_1) x^1 x^2, \\
x^1 &= -p_{34}(\lambda_2 - \lambda_0) x^2 x^0 - p_{04}(\lambda_3 - \lambda_2) x^2 x^3, \\
x^2 &= p_{34}(\lambda_1 - \lambda_0) x^0 x^1 + p_{04}(\lambda_3 - \lambda_1) x^3 x^1 + p_{01}(\lambda_4 - \lambda_3) x^3 x^4, \\
x^3 &= -p_{01}(\lambda_4 - \lambda_2) x^4 x^2 - p_{04}(\lambda_2 - \lambda_1) x^1 x^2, \\
x^4 &= p_{01}(\lambda_3 - \lambda_2) x^2 x^3;
\end{aligned}$$

$\lambda_i$ ,  $i = 0, 2, \dots, 4$ , jsou koeficienty kinematické vazkosti [6]. V tomto systému, popisujícím kaskádní proces přenosu energie v turbulentním toku, je  $F_1$  integrálem energie a  $F_2$  integrálem čtverce vorticity, tj. enstrofií.

## 6 POHYBOVÉ ROVNICE $n$ -DIMENZIONÁLNÍHO TUHÉHO TĚLESA A SYMETRIZOVANÉ SYSTÉMY

Zajímavou třídou systémů hydrodynamického typu s více integrály pohybu jsou Eulerovy rovnice pro pohyb  $n$ -dimenzionálních tuhých těles. Tyto rovnice patří do jedné skupiny s kanonickým tripletem – pohybovými rovnicemi trojdimenzionálního tuhého tělesa, otáčejícího se kolem pevného bodu. Platí  $d\mathbf{M}/dt = [\mathbf{M}, \mathbf{\Omega}]$ , kde  $\mathbf{M} = I\mathbf{\Omega}$  je moment hybnosti,  $I$  tenzor setrvačnosti a  $\mathbf{\Omega}$  úhlová rychlost rotace tuhého tělesa. Úhlové rychlosti  $\mathbf{\Omega}$  v eukleidovském trojdimenzionálním prostoru lze ztotožnit s antisymetrickými maticemi 3. řádu. Vektorový součin  $[\mathbf{M}, \mathbf{\Omega}]$  odpovídá komutátoru matic  $[\mathbf{M}, \mathbf{\Omega}] = \mathbf{M}\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\mathbf{M}$ . Vektor momentu hybnosti  $\mathbf{M}$  v ortogonální bázi os setrvačnosti tělesa píšeme ve tvaru  $\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}\mathbf{A}$ , kde  $\mathbf{A} = (a_{ii})$  je diagonální matice,  $(a_{ii}) = a_i > 0$ . Eulerovy rovnice poté mají tvar

$$\dot{\mathbf{M}} = [\mathbf{M}, \mathbf{\Omega}], \quad (a_i + a_j) \dot{x}_{ij} = (a_i - a_j) \sum_k x_{ik} x_{kj}, \quad (6.1)$$

$\mathbf{\Omega} = (x_{ij})$ ,  $\mathbf{\Omega}' = -\mathbf{\Omega}$  ( $\mathbf{\Omega}'$  je matice transponovaná k matici  $\mathbf{\Omega}$ ). Pro homogenní  $n$ -dimenzionální elipsoid s poloosami  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  je soubor  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  úměrný  $(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_n^2)$ . Elipsoid pokládáme za maximálně neizotropní:  $\alpha_i \neq \alpha_j$  pro  $i \neq j$ . Rovnice (6.1) je invariantním podsystémem v symmetrizovaném  $\theta$ -systému:

$$(a_i + a_j) \dot{x}_{ij} = (a_i - a_j) \partial F / \partial x_{ij},$$

$$F = 3^{-1} \sum_{ijk} x_{ik} x_{kj} x_{ji}, \quad x_{ii} \equiv 0, \quad (6.2)$$

zadaným na prostoru  $L_n$  matic s nulovou hlavní diagonálou. Je-li  $x_{ij}(t_0) = -x_{ji}(t_0)$ , poté (podle (6.2))

$$(a_i + a_j) \dot{x}_{ij}(t_0) = (a_i - a_j) \sum_k x_{jk} x_{ki}(t_0) = -(a_j - a_i) \sum_k x_{ik} x_{kj}(t_0).$$

Tak dostáváme  $\dot{x}_{ij}(t_0) = -\dot{x}_{ji}(t_0)$  a prostor antisymetrických matic je invariantním podprostorem pro systém (6.2), na němž se systém (6.2) shoduje se systémem (6.1). Protože  $\partial^2 F / \partial x_{ij}^2 = 0$ , systém (6.2) je regulární s pozitivním kvadratickým integrálem  $E = 2^{-1} \sum_{i < j} (a_i + a_j) x_{ij}^2$ . Proto je (6.2)  $\Theta$ -

systémem hydrodynamického typu. Samotné Eulerovy rovnice představují systém hydrodynamického typu s integrálem  $E_1 = 2^{-1} \sum_{i < j} (a_i + a_j) x_{ij}^2$ . Regu-

larita systému (6.1) vyplývá z rovnosti  $\partial \dot{x}_{ij} / \partial x_{ij} = 0$ , neboť  $x_{ii} = 0$ .

Komplexní analogií (6.1), zobecněnou rovnicí komplexního tripletu, jsou pohybové rovnice zobecněného tuhého tělesa s prostorem úhlových rychlostí, antisymetrických hermitovských matic řádu  $n$  ( $x_{ij} = -\bar{x}_{ji}$ )

$$(a_i + a_j) \dot{x}_{ij} = (a_i - a_j) \sum_k x_{ik} x_{kj}; \quad (6.3)$$

$a_i$  jsou reálná a ve dvojicích rozdílná. Na invariantním podprostoru  $\mathbf{K}_n(\mathbb{C})$  antisymetrických hermitovských matic s nulovými prvky v hlavní diagonále je systém (6.3) komplexním rozšířením Eulerových rovnic (6.1). Pro  $n = 3$  přechází (6.3) na rovnice komplexního tripletu. Tentýž systém je na  $\mathbf{K}_n(\mathbb{C})$  invariantním podsystémem v symetrizovaném komplexním systému hydrodynamického typu, zadaným na prostoru  $\mathbf{L}_n(\mathbb{C})$  komplexních matic řádu  $n$  s nulovou hlavní diagonálou:

$$(a_i + a_j) \dot{x}_{ij} = (a_i - a_j) \overline{\partial \Phi / \partial x_{ij}}, \quad \Phi = 3^{-1} \sum_{ijk} x_{ik} x_{kj} x_{ji}. \quad (6.4)$$

Systém (6.4) je regulární, neboť symetrizovaný komplexní systém je  $H$ -systémem s pozitivním integrálem

$$E_C = 2^{-1} \sum_{ij} (a_i + a_j) x_{ij} \bar{x}_{ij}.$$

Když bude  $x_{ij}(t_0) = -\bar{x}_{ji}(t_0)$ , s přihlédnutím k (6.4) dostáváme

$$(a_i + a_j) \dot{x}_{ij}(t_0) = (a_i - a_j) \sum_k \overline{x_{jk} x_{ki}(t_0)} = -(a_j - a_i) \sum_k x_{ik} x_{kj}(t_0).$$

Odtud máme  $\dot{x}_{ij}(t_0) = -\dot{x}_{ji}(t_0)$  a systém (6.3) na  $\mathbf{K}_n(\mathbb{C})$  je invariantním podsystémem (6.4). Systém (6.3) na  $\mathbf{K}_n(\mathbb{C})$  je regulární, má pozitivní integrál  $E_2 = 2^{-1} \sum_{i < j} (a_i + a_j) x_{ij} \bar{x}_{ij}$  a je systémem hydrodynamického typu.

## 7 PRVNÍ INTEGRÁLY SYSTÉMU EULEROVÝCH ROVNIC

Eulerovy pohybové rovnice  $n$ -dimenzionálního tuhého tělesa, otáčejícího se kolem pevného bodu, mají kromě integrálů pohybu  $\text{Tr}(\mathbf{M}^{2k})$ ,  $1 \leq k \leq n/2$ , nezávislých na prostoru úhlových rychlostí a integrálu energie  $E_1 = -4^{-1}\text{Tr}(\mathbf{M}, \mathbf{\Omega})$ , ještě sérii prvních integrálů

$$L_2(\mathbf{\Omega}) = \text{Tr} \left( \sum_{k=0,1,\dots,s} \mathbf{A} \mathbf{\Omega} \mathbf{A}^k \mathbf{\Omega} \mathbf{A}^{s-k} \right),$$

kde  $s \geq 0$  je celé číslo. Pro  $\mathbf{\Omega} = (x_{ij})$ ,  $x_{ij} = -x_{ji}$ ,

$$L_s(\mathbf{\Omega}) = -\sum_{i<j} x_{ij}^2 \frac{a_i + a_j}{a_i - a_j} (a_i^{s+1} - a_j^{s+1}). \quad (7.1)$$

Tím, že platí

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L_s(\mathbf{\Omega}) &= -2 \sum_{i<j} (a_i^{s+1} - a_j^{s+1}) x_{ij} \sum_k x_{ik} x_{kj} = -2 \sum_{ijk} a_i^{s+1} x_{ij} x_{jk} x_{ki} = \\ &= -2 \sum_i \sum_{j<k} a_i^{s+1} (x_{ij} x_{jk} x_{ki} + x_{ik} x_{kj} x_{ji}) \equiv 0, \end{aligned}$$

$L_2(\mathbf{\Omega})$  je integrálem pohybu systému Eulerových rovnic. Integrály  $L_2(\mathbf{\Omega})$  jsou zobecněním klasických integrálů  $E_1$  a  $\text{Tr}(\mathbf{M}^2)$ :

$$\begin{aligned} L_0(\mathbf{\Omega}) &= -\sum_{i<j} (a_i + a_j) x_{ij}^2 = -2E_1, \\ L_1(\mathbf{\Omega}) &= -\sum_{i<j} (a_i + a_j)^2 x_{ij}^2 = 2^{-1} \text{Tr}(\mathbf{M}^2). \end{aligned}$$

Orbitou  $O_{\mathbf{M}}$  momentu  $\mathbf{M}$  nazýváme třídu ekvivalence momentů, přecházejících v  $\mathbf{M}$  při ortogonálních transformacích prostoru  $\mathbb{R}^n$ :  $O_{\mathbf{M}} =$



$= \{g \mathbf{M} g^{-1}, g \in SO(n)\}$ .  $SO(n)$  je grupa rotací  $n$ -dimenzionálního Eukleidova prostoru, tedy konfiguračního prostoru  $n$ -dimenzionálního tuhého tělesa upevněného v bodě. Lieovou algebrou této grupy je  $n$ -dimenzionální prostor úhlových rychlostí. V algebře grupy  $G = SO(n)$  je komutátor obyčejným vektorovým součinem. Integrály  $L_s(\boldsymbol{\Omega})$  pro  $0 \leq s \leq n-2$ ,  $s \neq 1$ , nezachovávají konstantní hodnoty na  $O_{\mathbf{M}}$  na rozdíl od integrálů  $\text{Tr}(\mathbf{M}^{2k})$ . Orbita  $O_{\mathbf{M}}$  je zadána hodnotami integrálů  $\text{Tr}(\mathbf{M}^{2k})$ . Jestliže zapíšeme Eulerovy rovnice ve tvaru

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{M} + \xi \mathbf{A}^2) = [\mathbf{M} + \xi \mathbf{A}^2, \boldsymbol{\Omega} + \xi \mathbf{A}]$$

s nezávislým komplexním parametrem  $\xi$ , můžeme se přesvědčit, že výraz  $\text{Tr}((\mathbf{M} + \xi \mathbf{A}^2)^k)$  je integrálem pohybu Eulerových rovnic s polynomickou závislostí na  $\xi \in C$  ( $k \geq 2$  je celé číslo) a  $C$ , stejně jako dříve, je množina komplexních čísel. Pak ovšem koeficient  $a_{l,k}(\mathbf{M}, \mathbf{A})$  při  $\xi^l$  v zápisu  $\text{Tr}((\mathbf{M} + \xi \mathbf{A}^2)^k)$  ( $0 \leq l \leq k-2$ ) je integrálem Eulerových rovnic s polynomickou závislostí na  $a_j$  a také na elementech  $m_{ij}$  matice  $\mathbf{M}$ . Jelikož matice  $\mathbf{M}$  je antisymetrická,  $\mathbf{M}' = -\mathbf{M}$ , máme

$$\text{Tr}((\mathbf{M} + \xi \mathbf{A}^2)^k) = \text{Tr}(((\mathbf{M} + \xi \mathbf{A}^2)')^k) = \text{Tr}((-\mathbf{M} + \xi \mathbf{A}^2)^k)$$

a  $a_{lk}(\mathbf{M}, \mathbf{A}) \equiv 0$  pro lichá  $k-l$ . Při daném  $k$  je počet nenulových integrálů, různých od  $a_{0,k} = \text{Tr}(\mathbf{M}^k)$ , roven číslu  $(k-1)/2$ . Celkový počet nenulových integrálů pohybu  $a_{l,k}(\mathbf{M}, \mathbf{A})$ , lišících se od  $\text{Tr}(\mathbf{M}^k)$ , pro sudé  $n$  je  $2(1+2+\dots+(n-2))/2 = n(n-2)/4$  a  $2(1+2+\dots+(n-3)/2) + (n-1)/2 = (n-1)^2/4$  pro liché  $n$ . Dimenze orbity  $O_{\mathbf{M}}$  je pro téměř libovolné  $\mathbf{M}$  rovna  $n(n-1)/2 - [n/2]$ . Odtud dostáváme, že na  $O_{\mathbf{M}}$  počet integrálů  $a_{lk}(\mathbf{M}, \mathbf{A})$  s nekonstantními hodnotami na  $O_{\mathbf{M}}$  je roven jedné polovině dimenze  $O_{\mathbf{M}}$ .

Vraťme se k integrálům  $L_s(\boldsymbol{\Omega})$ . Lze je zapsat ve tvaru lineární kombinace integrálů  $a_{k-2,k}(\mathbf{M}, \mathbf{A})$  s koeficienty závisujícími na  $\mathbf{A}$ , avšak nikoliv na  $\boldsymbol{\Omega}$ :

$$L_s(\boldsymbol{\Omega}) = \sum_{k=2,3,\dots,n} c_{sk}(\mathbf{A}) \tilde{a}_k(\boldsymbol{\Omega}), \quad 0 \leq s \leq n-2,$$

kde

$$\begin{aligned} k\tilde{a}_k(\boldsymbol{\Omega}) &= a_{k-2,k}(\mathbf{M}, \mathbf{A}) = \sum_{p+q=k-2} (p+1) \text{Tr}(\mathbf{A}^{2p} \mathbf{M} \mathbf{A}^{2q} \mathbf{M}) = \\ &= 2^{-1} k \sum_{p+q=k-2} \text{Tr}(\mathbf{A}^{2p} \mathbf{M} \mathbf{A}^{2q} \mathbf{M}), \\ \tilde{a}_k(\boldsymbol{\Omega}) &= 2^{-1} \sum_{p+q=k-2} a_i^{2p} a_j^{2q} m_{ij} m_{ji}. \end{aligned}$$

Podle (7.1) musí  $c_{sk}(\mathbf{A})$  vyhovovat lineárním rovnicím

$$\sum_{k=2,3,\dots,n} c_{s,k} (a_i^{2(k-1)} - a_j^{2(k-1)}) = a_i^{s+1} - a_j^{s+1}. \quad (7.2)$$

Pro liché  $s$  řešením (7.2) jsou  $c_{s,k_1} = 1$  pro  $k_1 = (s+3)/2$  a  $c_{s,k} = 0$  pro  $k \neq k_1$ .  
Dodejme, že (7.2) a

$$\sum_{k=2,3,\dots,n} c_{s,k} a_i^{2(k-1)} + c_{s,1} = a_i^{s+1} \quad (7.3)$$

jsou systémy ekvivalentní. V (7.3) je  $c_{s,1}$  konstanta nezávisající na  $i$ . Všimněme si, že systém (7.3) má protějšek v tvrzení o dělitelnosti polynomu  $G(\lambda) = -\lambda^{s+1} + \sum c_{sk} \lambda^{2(k-1)} + c_{s,1}$  charakteristickým polynomem  $F(\lambda) = \det |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}|$  matice  $\mathbf{A}$ :  $G(\lambda) = g(\lambda)F(\lambda)$ , kde je  $g(\lambda)$  polynom stupně  $n-2$ . Necht'  $s$  je liché a  $G(\lambda) = -\lambda^{s+1} + \sum_{j=0,1,\dots,2n-2} \gamma_j \lambda^j$ . Tehdy rovnice  $\gamma_{2k+1} = 0$  pro  $2k \neq s$ ,  $\gamma_{s+1} = -1$  tvoří lineární systém řádu  $n-1$ , kterému vyhovují koeficienty  $g(\lambda)$ . Tento systém má jediné řešení, neboť odpovídající homogenní systém nabývá nulových hodnot v bodech  $(a_1, a_2, \dots, a_n, -a_1, -a_2, \dots, -a_n)$  a je tedy identicky roven nule.

## 8 SIMPLEKTICKÁ STRUKTURA NA ORBITÁCH, INVOLUCE INTEGRÁLŮ A ÚPLNÁ INTEGRABILITA SYSTÉMU EULEROVÝCH ROVNIC

Začneme výkladem simplektické struktury na varietě. Budiž  $M^{2n}$  diferencovatelná varieta dimenze  $2n$ . Simplektickou strukturou na  $M^{2n}$  nazvěme uzavřenou nedegenerovanou diferenciální 2-formu (značíme ji zde  $\omega^2$ ) na  $M^{2n}$ :  $d\omega^2 = 0$ ; pro všechna  $\xi \neq 0$  existuje  $\eta$  takové, že  $\omega^2(\xi, \eta) \neq 0$ ;  $\xi, \eta \in TM_x$ . Dvojice  $(M^{2n}, \omega^2)$  se nazývá simplektickou varietou.

Pro ilustraci uvažme lineární prostor  $\mathbb{R}^{2n}$  se souřadnicemi  $p_i, q_i$  a necht'  $\omega^2 = \sum d p_i \wedge d q_i$ . Pak  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega^2)$  je simplektická varieta a pro  $n = 1$  dvojice  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega^2)$  je rovina (plocha).

Následující příklad objasňuje pojem simplektické variety v dynamice [13, 14]. Nejdříve si připomeňme pojem tzv. tečného bandlu. Označme  $T_a\mathbb{R}^n$  množinu všech vázaných vektorů na  $\mathbb{R}^n$  s počátkem v bodu  $\mathbf{a}$  a nazvěme ji tečným prostorem k  $\mathbb{R}^n$  v bodě  $\mathbf{a}$ . Sjednocení všech tečných prostorů  $TR^n = \bigcup_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n} T_a\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  nazvěme tečný bandl prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Je to tedy

číselný prostor dimenze  $2n$ , který má přirozenou strukturu diferencovatelné variety. Bodem sjednocení  $TR^n$  je vektor  $\xi$ , tečný k  $\mathbb{R}^n$  v libovolném bodě  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ . Jestliže jsou  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  lokální souřadnice na varietě  $\mathbb{R}^n$  a  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  složky tečného vektoru v tomto lokálním souřadnicovém systému, pak  $2n$  čísla  $(q_1, q_2, \dots, q_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  je určen souřadnicový systém na  $TR^n$ .

Budiž dále  $V$  diferencovatelná  $n$ -dimenzionální varieta. Kotečným vektorem variety  $V$  v jejím bodě  $\mathbf{a}$  nazvěme 1-formu v tečném prostoru variety  $V$  v bodě  $\mathbf{a}$ . Množina všech kotečných vektorů variety  $V$  v bodě  $\mathbf{a}$  vytváří  $n$ -dimenzionální lineární prostor duální k tečnému prostoru  $TV_{\mathbf{a}}$ ; označme ho  $T^*V_{\mathbf{a}}$ . Sjednocením všech kotečných prostorů  $T^*V_{\mathbf{a}}$  variety  $V$  ve všech jejích bodech získáme bandl duální k bandlu  $TV$ , který označíme  $T^*V$ . Uvědomme si, že bod duálního bandlu  $T^*V$  je 1-forma v tečném prostoru variety  $V$

v jejím libovolném bodě. Při zadaném souboru  $q_i$  lokálních souřadnic bodu variety  $V$  o počtu  $n$ , taková 1-forma je zadána svými  $n$  složkami  $p_i$  a  $2n$  čísel  $p_i, q_i, i = 1, 2, \dots, n$ , určuje systém lokálních souřadnic bodu  $T^*V$ . Lze dokázat [14], že  $T^*V$  má přirozenou symplektickou strukturu. V zavedeném souřadnicovém systému je tato struktura dána vztahem

$$\omega^2 = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 + \dots + dp_n \wedge dq_n.$$

Důležitý případ přirozené struktury symplektické variety nám poskytuje Lagrangeova mechanika systému s konfigurační varietou  $V$  a Lagrangeovou funkcí  $L$ . Snadno nahlédneme, že lagrangeovská zobecněná rychlost  $\dot{\mathbf{q}}$  je tečným vektorem variety  $V$  a hybnost  $\mathbf{p}$  je kotečným vektorem vedeným k varietě  $V$ . Kotečný bandl konfigurační variety  $V$  je fázový  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  prostor lagrangeovské úlohy. Přihlédneme-li k předchozímu výroku o symplektické struktuře, docházíme k závěru, že fázový prostor mechanického systému má přirozenou strukturu symplektické variety  $V$ . Můžeme se přesvědčit o tom, že Legendrova (duální) transformace nezávisí na volbě souřadnicového systému: tato transformace přiřazuje funkci  $L: TV \rightarrow \mathbb{R}^1$  na tečném bandlu funkci  $H: T^*V \rightarrow \mathbb{R}^1$  na kotečném bandlu.

Zastavme se ještě krátce u hamiltonovských vektorových polí. Riemannova struktura na varietě vytváří izomorfismus mezi prostory tečných vektorů a diferenciálními 1-formami. Podobný izomorfismus přisuzujeme rovněž symplektické struktuře. Vyjděme z následující operace: Vektoru  $\xi$  tečnému v bodě  $\mathbf{x}$  k symplektické varietě  $(M^{2n}, \omega^2)$  přiřadíme diferenciální 1-formu  $\omega_\xi^1$  na  $TM_x$  zápisem  $\omega_\xi^1(\eta) = \omega^2(\eta, \xi)$  a to pro všechna  $\eta \in TM_x$ . Označme  $I$  izomorfismus  $T^*M_x \rightarrow TM_x$  a necht'  $H$  je funkce na symplektické varietě  $M^{2n}$ . Tehdy je  $dH$  diferenciální 1-forma na  $M$ , které odpovídá v každém bodě jistý tečný vektor k  $M$ . Tak dostáváme na  $M$  vektorové pole  $IdH$  a toto pole nazýváme hamiltonovským vektorovým polem a  $H$  Hamiltonovou funkcí. V případě, kdy  $M^{2n} = \mathbb{R}^{2n} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}$ , dospíváme k poli fázové rychlosti Hamiltonových kanonických rovnic  $\dot{\mathbf{x}} = IdH(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \dot{\mathbf{p}} = -\partial H / \partial \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} = \partial H / \partial \mathbf{p}$ .

Vraťme se k našemu původnímu záměru, popsat symplektickou strukturu na orbitách Eulerova systému.

Budiž  $\mathbf{M}$  moment hybnosti v pohybové rovnici  $\dot{\mathbf{M}} = [\mathbf{M}, \mathbf{\Omega}]$   $n$ -dimenzionálního tuhého tělesa a  $O_{\mathbf{M}}$  jeho orbita. Libovolný tečný vektor k orbitě  $O_{\mathbf{M}}$  v bodě  $\mathbf{M}$  píšeme ve tvaru  $\xi = [\mathbf{M}, \alpha]$ , kde  $\alpha$  je jistá antisymetrická matice. Tvrdíme, že na  $O_{\mathbf{M}}$  existuje symplektická struktura daná nedegenerovanou uzavřenou diferenciální 2-formou  $\omega(\xi_1, \xi_2)$ . Podle [6] forma

$\omega(\xi_1, \xi_2) = -\text{Tr}(\mathbf{M}[\alpha_1, \alpha_2])$ , kde  $\xi_j = [\mathbf{M}, \alpha_j]$  a jí zadaná symplektická struktura byly poprvé použity v teorii reprezentace nilpotentních Lieových grup. Na prostoru antisymetrických matic  $\mathfrak{so}(n)$  je definován nedegenerovaný skalární součin  $(\alpha, \beta) = -\text{Tr}(\alpha\beta)$ . Hodnota formy  $\omega(\xi_1, \xi_2) = (\mathbf{M}, [\alpha_1, \alpha_2]) = (\xi_1, \xi_2) = -(\xi_2, \alpha_1)$ , kde  $\xi_j = [\mathbf{M}, \alpha_j]$ , nezávisí na tom, jak zvolíme  $\alpha_j$  při zadaném  $\xi_j$ . Protože  $[\alpha_1, \alpha_2] = -[\alpha_2, \alpha_1]$ , platí  $\omega(\xi_1, \xi_2) = -\omega(\xi_2, \xi_1)$ . Forma  $\omega$  je nedegenerovaná a tak pro libovolná  $\xi_1 \neq 0$  existuje  $\alpha_2 \in \mathfrak{so}(n)$  takové, že  $(\xi_1, \alpha_2) \neq 0$  a  $\omega(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \alpha_2) \neq 0$ . Nyní je třeba přihlédnout k obecným vlastnostem dynamických systémů se symetrií [6]. Víme, že jednoparametrická grupa symetrií dynamického systému určuje jeho první integrál. Charakterizuje-li systém grupa symetrií, setkáváme se s několika takovými integrály. Jejich hladiny vytvářejí ve fázovém prostoru systému invariantní variety fázového toku, které podgrupa symetrií z tohoto prostoru tyto variety „ponechává na místě“ (jejich polohy se ve fázovém prostoru nemění). V mnoha případech je možno uvažovat o faktorové varietě invariantní variety podle této grupy. V našem případě je to orbita  $O_{\mathbf{M}}$ , která je faktorovou varietou působení ortogonální grupy  $SO(n)$  na sebe levou translací. Proto je forma  $\omega$  uzavřená a zadává na  $O_{\mathbf{M}}$  symplektickou strukturu.

Vektorové pole  $\xi$ , které je tečným polem orbity  $O_{\mathbf{M}}$ , nezveme hamiltonovské, jestliže na  $O_{\mathbf{M}}$  lokálně existuje funkce  $H$  (nazývaná hamiltoniánem) taková, že  $\omega(\eta, \xi)(\mathbf{x}) = \partial_{\eta} H(\mathbf{x})$ , a to pro libovolná  $\mathbf{x} \in O_{\mathbf{M}}$  a v bodě  $\mathbf{x}$  tečný vektor  $\eta$  k orbitě  $O_{\mathbf{M}}$ ;  $(\partial_{\eta} H(\mathbf{x}))$  je derivace  $H$  podle vektoru  $\eta$ . Hamiltonovské vektorové pole  $\xi$  s hamiltoniánem  $H$  označíme  $\xi_H$ . Všimněme si toho, že forma  $\omega$  definuje Poissonovu závorku pro funkce  $F_1, F_2$  na  $O_{\mathbf{M}}$ :  $\{F_1, F_2\} = \partial_{(\xi_{F_2})} F_1 = -\partial_{(\xi_{F_1})} F_2 = \omega(\xi_{F_2}, \xi_{F_1})$ . Funkce  $F_1$  a  $F_2$  jsou v involuci, jestliže  $\{F_1, F_2\} = 0$ .

Eulerova rovnice určuje symplektické vektorové pole  $\xi_E$  na  $O_{\mathbf{M}}$  s hamiltoniánem  $E = 2^{-1}(\mathbf{M}, \mathbf{\Omega}) = -2^{-1}\text{Tr}(\mathbf{M}\mathbf{\Omega}) = 2^{-1} \sum_{i,j} m_{ij}^2 (\lambda_i + \lambda_j)^{-1}$ , ohraničeným na  $O_{\mathbf{M}}$  kvadratickou formou s antisymetrickou maticí  $\mathbf{M} = (m_{ij})$ . Derivací  $E$  podle vektoru  $\eta$  (je to matice, pro kterou  $\eta' = -\eta$  a  $\eta'$  je matice transponovaná k matici  $\eta$ ) dostáváme (v maticovém tvaru)

$$\partial_{\eta} E = \sum_{i,j} \eta_{ij} m_{ij} (\lambda_i + \lambda_j)^{-1} = -\text{Tr}(\eta\mathbf{\Omega}) = (\eta, \mathbf{\Omega}).$$

Tečný vektor  $\eta$  orbity  $O_{\mathbf{M}}$  v bodě  $\mathbf{M}$  vyjádříme ve tvaru  $\eta = [\mathbf{M}, \alpha]$  s maticí  $\alpha = -\mathbf{a}$ . Eulerova rovnice definuje vektorové pole  $\dot{\mathbf{M}} = [\mathbf{M}, \mathbf{\Omega}]$ , tečné k  $O_{\mathbf{M}}$ .

Z definice diferenciální formy  $\omega$  vyplývá, že  $\omega(\eta, \dot{\mathbf{M}}) = (\mathbf{M}, [\alpha, \Omega]) =$   
 $= ([\mathbf{M}, \alpha], \Omega) = (\eta, \Omega) = \partial_{\eta} E$  a tedy  $\dot{\mathbf{M}} = \xi_E$ .

Bylo dokázáno (citujeme podle [6], že pro integrály  $L_s(\Omega)$ ,  $L_k(\Omega)$  na každé orbitě  $O_{\mathbf{M}}$  dostáváme  $\{L_s, L_k\} = 0$  a podmínku  $\{F_1, F_2\} = 0$  splňují rovněž integrály pohybu  $F_j = \text{Tr}((\mathbf{M} + \xi_j \mathbf{A}^2) h_j)$ , kde  $h_j$  je celé kladné číslo a  $\xi_j$  komplexní parametr. Odtud nahlédneme, že i integrály  $a_{i,k}(\mathbf{M}, \mathbf{A})$  Eulerovy rovnice vyhovují této rovnosti a to na každé orbitě  $O_{\mathbf{M}}$ . Pro téměř libovolné  $\mathbf{M}$  je počet integrálů  $a_{i,k}$  Eulerova systému nezávislých na orbitě  $O_{\mathbf{M}}$  roven polovině dimenze  $O_{\mathbf{M}}$ . Protože integrály  $a_{i,k}$  splňují podmínku involuce, Eulerovy rovnice (podle Liouvilleova teorému) jsou plně integrovaným hamiltonovským systémem na orbitě  $O_{\mathbf{M}}$ .

## 9 POHYBOVÉ ROVNICE ZOBECNĚNÉHO TUHÉHO TĚLESA A JEJICH VZTAH S ROVNICEMI HYDRODYNAMIKY

Konfiguračním prostorem tuhého tělesa otáčejícího se kolem pevného bodu je grupa rotací  $G = SO(3)$  trojdimenzionálního Eukleidova prostoru. Eulerovy rovnice takového tělesa mohou být zapsány jako rovnice tečného vektoru ke geodetice levoinvariantní Riemannovy metriky na  $SO(3)$  (metrika je zadána kinetickou energií tělesa). Eulerovu pohybovou rovnici dokonalé tekutiny taktéž můžeme chápat jako pohybovou rovnici po geodetice. Zobecněným tuhým tělesem rozumíme systém s konfiguračním prostorem – Lieovou grupou – nulovou potenciální energií a kinetickou energií zadávající levo (či pravo) invariantní metriku na  $G$ , rovnající se pozitivně definitní kvadratické formě na Lieově algebře  $\mathfrak{g}$  grupy  $G$ . Podle principu nejmenší akce k pohybu zobecněného tuhého tělesa dochází na geodetice této metriky na  $G$ .

Aplikace vztahů spojených s konečnědimenzionálním zobecněným tělesem na oblast v hydrodynamice mohou někdy poskytnout užitečné informace. Tak je tomu například v otázkách prediktability přenosu hmoty jistými dvojdimenzionálními hydrodynamickými toky, kde se uplatní vztah pro Gaussovu křivost grupy  $G$  s jednostrannou invariantní metrikou. Je třeba mít na paměti, že s rovnicemi hydrodynamiky jsou spojeny nekonečnědimenzionální grupy transformací a ne všechny vlastnosti konečnědimenzionálních zobecněných tuhých těles mají reálné protějšky v hydrodynamice.

Je známo, že na konečnědimenzionálních Lieových grupách s jednostranně invariantní metrikou je možno geodetiky této metriky v čase neomezeně prodlužovat na obě strany (viz kap. 12). Máme-li na mysli právě řešení Eulerovy pohybové rovnice dokonalé homogenní tekutiny v trojdimenzionální oblasti  $D$ , lze ho, jak víme, interpretovat jako časovou závislost tečného vektoru geodetiky pravoinvariantní Riemannovy metriky na grupě  $SDiffD$  zachovávající objemy vzájemně jednoznačných zobrazení  $D \rightarrow D$ , hladkých spolu s inverzními zobrazeními. Přesněji řečeno, budiž  $\eta_t$

geodetická pravoinvariantní metrika v oblasti  $D$  a necht'  $\mathbf{v}_t = (\frac{d}{dt}) \boldsymbol{\eta}_t$  je vektor rychlostí podél geodetiky. Jestliže položíme  $\mathbf{u}_t = \mathbf{v}_t \circ \boldsymbol{\eta}_t$ , bude  $\mathbf{u}_t$  vektorovým polem na  $D$  tečným k okraji  $\partial D$  oblasti  $D$  a  $\mathbf{u}_t$  bude řešením Eulerovy rovnice  $\partial \mathbf{u}_t / \partial t + \nabla_{\mathbf{u}_t} \mathbf{u}_t = \text{grad } p_t$ ,  $\text{div } \mathbf{u}_t = 0$ ;  $\mathbf{u}_t$  je tečné k  $\partial D$  a je zadáno pro  $t = 0$ . Veličina  $p_t: D \rightarrow D$  je tlak tekutiny a  $\nabla$  značí kovariantní derivaci. Existují důvody předpokládat, že pro typické hladké počáteční pole rychlosti v  $D$  existuje klasické řešení Eulerovy rovnice jen v konečném čase (nezávislé na počátečních podmínkách), tj. téměř všechny geodetiky na grupě  $SDiffD$  nelze neomezeně prodlužovat.

Necht' je v  $\mathbf{R}^3$  zadáno hladké počáteční pole rychlosti velkých měřítek, tj. k perturbaci pole dochází toliko u vírů s měřítkem  $\sim l_0$ . Tyto víry naruší hierarchii vírů s měřítky  $l_n \sim 2^{-n} l_0$ . Doba působení perturbace přenášené víry o měřítku  $l_n$  na víry s měřítkem  $l_{n+1}$  je řádově rovna době  $t_n \sim l_n / v_n$ , kde je  $v_n$  typický modul rozdílu rychlosti v bodech  $\mathbf{R}^3$  od sebe vzdálených  $l_n$ . Kinetická energie vírů s měřítkem  $l_n$  (vztažená na jednotku hmotnosti) je

$$E_n = \int_{k_n}^{k_{n+1}} E(k) dk; \quad E(k) \text{ vyjadřuje energetické spektrum a } k_n = l_n^{-1}.$$

Specifická rychlost přenosu energie ve směru od vírů s měřítkem  $l_n$  k vírům s měřítkem  $l_{n+1}$  činí  $\varepsilon_n \sim E_n / t_n \sim v_n^3 / l_n$ . K perturbaci celé kaskády vírů dojde v čase  $t_+ \sim \sum t_n \sim l_0 / v_0$ . Předpokládejme, že k přenosu energie ve spektru dochází s konstantním tokem  $\varepsilon_n = \varepsilon$ . Tehdy je splněn Kolmogorovův-Obuchovův zákon, neboť platí  $v_n \sim (\varepsilon l_n)^{1/3}$ ,  $E_n \sim (\varepsilon l_n)^{2/3}$ ,  $t_n \sim \varepsilon^{-1/3} l_n^{2/3}$ . V případě Eulerovy rovnice se nesetkáváme s intervalem disipace, ze hry nejsou vyloučena vysoká vlnová čísla a očekáváme, že integrál čtverce vorticity

$$\Omega = \int_0^\infty k^2 E(k) dk \sim \sum_n k_n^2 E_n \sim \varepsilon^{2/3} \sum_n l_n^{-4/3} \sim \varepsilon^{2/3} l_0^{-4/3} \sum_n (2^{4/3})^n$$

roste nade všechny meze v čase, který je úměrný  $t_+$ . Proto je třeba chápat řešení Eulerovy rovnice pro velká  $t$  ve zobecněném smyslu [6].

Přístupme k pohybovým rovnicím zobecněného těžkého setrvačnicku. V mechanice tuhého tělesa jím rozumíme každé tuhé těleso, které se může otáčet kolem pevného bodu. Působí-li na tuhé těleso jen tíže, je její moment vzhledem k těžišti roven nule. Otáčí-li se však tuhé těleso kolem pevného bodu, který není jeho těžištěm, je vhodné zvolit tento bod za referenční bod a zavést moment tíže vzhledem k němu. Takové těleso nazýváme těžkým setrvačnickem. Konfiguračním prostorem zobecněného těžkého setrvačnicku je libovolná Lieova grupa a přirozenou hydrodynamickou interpretací řešení jeho pohybových rovnic jsou řešení Boussinesqových rovnic, které hledáme



ve třídě prostorově lineárních polí rychlosti a teploty. Boussinesqovy rovnice pro konvekci v podstatě jsou Navierovy-Stokesovy rovnice se členem vztlakové síly. Zaměříme-li pozornost na trojdimenzionální oblast  $D$  a na grupy  $SDiffD$  hladkých difeomorfismů zachovávajících objemy, analogii vytvářejí Boussinesqovy pohybové rovnice nehomogenní dokonale nestlačitelné tekutiny v potenciálním poli.

Zatímco v případě trojdimenzionálního těžkého setrvačnicku máme na zřeteli potenciál  $\Phi$  síly tíže a hustotu  $\rho(\mathbf{x})$  tělesa, nyní, uvažujeme-li zobecněný těžký setrvačnick, je třeba zadat v konfiguračním prostoru tělesa, Lieově grupě, operaci  $f$  grupy  $G$  na jisté varietě  $N$  (např. na lineárním prostoru  $\mathbf{R}^k$ ), tedy zobrazení  $f: G \times N \rightarrow N$ ,  $f(g_1, f(g_2, n)) = f(g_1 g_2, n)$ , kde  $g_1, g_2 \in G$ ,  $n \in N$ . Dále mějme objemový element  $d\mu$  na  $N$ , invariantní vůči  $f$ , hladkou funkci  $\Phi$  na  $N$ -potenciál v prostoru a nezápornou funkci  $\rho(\mathbf{x})$  na  $N$ , hustotu tělesa. Mimoto na Lieově algebře  $\mathfrak{g}$  Lieovy grupy  $G$  zadáme pozitivně definitní kvadratickou formu  $T(\xi)$ ,  $\xi \in \mathfrak{g}$ , určující kinetickou energii tělesa. Budeme předpokládat, že  $\int \rho(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) = 1$ . Potenciální energii tělesa  $U$  (s hustotou  $\rho(\mathbf{x})$ ), při potenciálu tíže  $\Phi$  nazveme funkci na  $G$ :  $U(g) = \int \rho(\mathbf{x}) \Phi(f(g, \mathbf{x})) d\mu(\mathbf{x})$ . Jestliže vztáhneme úhlovou rychlost k souřadnicovému systému pevně spojeným s tělesem, pak, je-li  $g \in G$  a  $\dot{g}$  tečný vektor k  $G$  v  $\mathfrak{g}$ , pro tuto rychlost  $\Omega$  dostáváme  $\Omega(g, \dot{g}) = (L_{g^{-1}})_* \dot{g}$ . Levou translací  $L_{g^{-1}}: G \rightarrow G$  převádějící  $h \in G$  do  $g^{-1}h$ , je převedeno  $\dot{g}$  do tečného prostoru k  $G$  v její jednotce, tj. v  $\mathfrak{g}$ .

Poznámka 9: rychlost otáčení  $\dot{g}$  tělesa je tečný vektor ke grupě v bodě  $g$ . Abychom získali úhlovou rychlost  $\omega$ , je třeba převést tento vektor do tečného prostoru ke grupě v jednotce, tj. do algebry. Lze tak učinit dvěma způsoby: levou a pravou translací. Výsledkem těchto operací jsou dva různé vektory v algebře;  $\omega_c = L_{g^{-1}*} \dot{g} \in \mathfrak{g}$ ,  $\omega_s = R_{g^{-1}*} \dot{g} \in \mathfrak{g}$ . V prvním případě jde o „úhlovou rychlost v tělese“ (corps), v druhém případě o „úhlovou rychlost v prostoru“ (space).

Poznámka 10: budiž  $G$  reálná Lieova grupa a  $\mathfrak{g}$  její Lieova algebra, tj. tečný prostor grupy v jednotce s komutátorem  $[\cdot, \cdot]$ . Lieova grupa působí na sebe levou a pravou translací: pro každý element  $g$  grupy  $G$  jsou definovány difeomorfismy grupy  $G$  do  $G$  takové, že

$$L_g: G \rightarrow G, L_g h = gh; R_g: G \rightarrow G, R_g h = hg.$$

Indukovaná zobrazení tečných prostorů označíme

$$L_{g*}: TG_h \rightarrow TG_{gh}; R_{g*}: TG_h \rightarrow TG_{hg}$$

pro každé  $h$  z grupy  $G$ .

Difeomorfismus  $R_{g^{-1}}L_g$  nazýváme vnitřní automorfismus grupy. Toto zobrazení ponechává na místě jednotku grupy. Jeho derivace v jednotce je lineární zobrazení algebry, tj. tečného prostoru grupy v jednotce, na sebe.

Kinetickou energii tělesa nazýváme funkci  $r^2$  ve fázovém prostoru, kvadraticky závisící na  $\dot{\mathbf{g}} : r^2(g, \dot{\mathbf{g}}) = T(\Omega(g, \dot{\mathbf{g}}))$ .

Její dvojnásobek udává levoinvariantní Riemannovu metriku na  $G$ . Eulerova rovnice (pro úhlovou rychlost v tělese) zobecněného tuhého tělesa je pohybovou rovnicí po geodetice dané Riemannovy metriky. Operátor setrvačnosti, převádějící úhlovou rychlost na moment hybnosti (kinetický moment) v souřadnicovém systému pevně spojeném s tělesem, je symetrický lineární operátor  $I$  z algebry  $\mathfrak{g}$  Lieovy grupy  $G$  do konjugovaného prostoru  $\mathfrak{g}^*$  lineárních forem na  $\mathfrak{g}$  takový, že  $(I\xi, \xi) = 2T(\xi)$ . Pohybovými rovnicemi zobecněného těžkého setrvačnicku se nazývá Eulerův-Lagrangeův systém pro extrémálu funkcionálu akce odpovídajícího Lagrangeově funkci

$$A(g, \dot{\mathbf{g}}) = r^2(g, \dot{\mathbf{g}}) - U(g), \quad (9.1)$$

tj. skutečné orbity zobecněného těžkého setrvačnicku v jeho konfiguračním prostoru jsou extrémály časového integrálu

$$F = \int_{t_1}^{t_2} A dt = \int_{t_1}^{t_2} (r^2 - U) dt$$

mezi všemi přípustnými orbitami s týmiž krajními body.

Dříve než pokročíme dále, připomeňme si zde pojmy adjungovaná (adjoint) a koadjungovaná (coadjoint) reprezentace grupy (viz též odst. 12.3). Budiž  $G$  reálná Lieova grupa a  $\mathfrak{g}$  její Lieova algebra. Adjungovaná reprezentace grupy  $G$  je zobrazení grupy do prostoru lineárních operátorů na algebře:  $\text{Ad}(g) = \text{Ad}_g, g \in G$ .  $\text{Ad}_g$  je homeomorfismus algebry, tj.  $\text{Ad}_g[\xi, \eta] = [\text{Ad}_g\xi, \text{Ad}_g\eta]$ ,  $\xi$  a  $\eta$  jsou z  $\mathfrak{g}$ . Zobrazení  $\text{Ad}$  je diferencovatelné. Uvažme jeho derivaci v jednotce grupy. Tato derivace je lineární zobrazení z algebry do prostoru lineárních operátorů na algebře. Příslušné zobrazení označíme  $\text{ad}$  a jeho obraz při působení na element  $\xi$  jako  $\text{ad}_\xi$ . Je tedy  $\text{ad}_\xi$  endomorfismus algebry a platí  $\text{ad} = \text{Ad}_{*e}: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End } \mathfrak{g}$ ,  $\text{ad}_\xi = d/dt|_{t=0} \text{Ad}_{e^{t\xi}}$ ;  $e^{t\xi}$  je jednoparametrická grupa s tečným vektorem  $\xi$ . V termínech jedné algebry píšeme  $\text{ad}_\xi\eta = [\xi, \eta]$ , kde  $[\ , \ ]$  je komutátor. Operátor duální k operátoru  $\text{Ad}_g^*$  zobrazuje tečný prostor grupy v její jednotce do sebe. Značíme  $\text{Ad}_g^*: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$  a píšeme  $(\text{Ad}_g^*\xi, \eta) \equiv (\xi, \text{Ad}_g\eta)$ . Operátory  $\text{Ad}_g^*$ , kde  $g$  probíhá Lieovu gru-

pu  $G$ , vytváří reprezentaci této grupy, tj. platí  $\text{Ad}_{gh}^* = \text{Ad}_h^* \text{Ad}_g^*$  a hovoříme o koadjungované reprezentaci grupy. Tato reprezentace hraje důležitou úlohu ve všech otázkách spojených s (levo) invariantními metrikami na grupě. Poznamenejme, že  $\text{ad}_\xi^*$  je lineární operátor v duálním prostoru k algebře  $\mathfrak{g}$  a  $\text{ad}_\xi^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ . Operátor  $\text{ad}_\xi^*$  je sdružený s  $\text{ad}_\xi : (\text{ad}_\xi^* \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \equiv (\boldsymbol{\eta}, \text{ad}_\xi \boldsymbol{\xi})$  pro všechna  $\boldsymbol{\eta} \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{g}$ . Někdy je výhodné označit operaci  $\text{ad}^*$  složenými závorkami, které značí bilineární funkci z  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$  do  $\mathfrak{g}^*$ :  $\text{ad}_\xi^* \boldsymbol{\eta} = \{\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\}$ , kde  $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{g}$ ,  $\boldsymbol{\eta} \in \mathfrak{g}^*$ . Tato bilineární funkce je spojena s komutátorem v algebře identitou  $(\{\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\}, \boldsymbol{\xi}) = (\boldsymbol{\eta}, [\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}])$ .

Vraťme se k pohybovým rovnicím zobecněného těžkého setrvačnicku a povšimněme si, jaké vektorové a skalární veličiny jsou definovány na orbitě  $\mathbf{g}(t)$  tohoto tělesa. Jsou to úhlová rychlost  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  v souřadnicovém systému pevně spojeném s tělesem, moment hybnosti  $\mathbf{M}(t) = I\boldsymbol{\Omega}(t)$  a potenciál  $\varphi(\mathbf{x}, t) = \Phi(f(\mathbf{g}(t), \mathbf{x}))$ ; úlohu vektoru momentu vnějších potenciálních sil působících na trojdimenzionální těžký gyroskop přebírá nyní funkce  $\mathbf{K}_\varphi(t) \in \mathfrak{g}^*$ :  $(\mathbf{K}_\varphi, \boldsymbol{\xi}) = -\int \rho(\mathbf{x})(d_{\mathbf{x}} \varphi, f_* \boldsymbol{\xi}) d\mu(\mathbf{x})$ , kde  $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{g}$ ,  $f_* \boldsymbol{\xi}$  je vektorové pole na  $N$  jako infinitezimální část akce  $f: (d/d\varepsilon) f(\exp \varepsilon \boldsymbol{\xi})|_{\varepsilon=0}$ . V případě trojdimenzionálního těžkého setrvačnicku je  $\mathbf{K}_\varphi$  vektor momentu vnějších sil působících na těleso. Potenciál  $\varphi$  splňuje rovnici  $\dot{\varphi}(\mathbf{x}, t) = (d_{\mathbf{x}} \varphi, f_* \boldsymbol{\Omega}(t))$ , kde je  $d_{\mathbf{x}} \varphi$  gradient  $\varphi$  v bodě  $\mathbf{x} \in N$ . Ukážeme, že pohybové rovnice zobecněného těžkého setrvačnicku s Lagrangeovou funkcí (9.1) mají tvar

$$\dot{\mathbf{M}}(t) = \text{ad}_{\boldsymbol{\Omega}(t)}^* \mathbf{M}(t) + \mathbf{K}_{\varphi(t)}. \quad (9.2)$$

Pro  $\varphi(t) \equiv 0$  přechází rovnice (9.2) na Eulerovy rovnice pro pohyb zobecněného tuhého tělesa.

Připomeňme si, že pro nás jsou Lieovy grupy většinou grupy matic. Řešení funkcionální rovnice pro matice  $\mathbf{g}(s+t) = \mathbf{g}(s) \cdot \mathbf{g}(t)$  v jistém okolí čísla 0 je  $\mathbf{g}(t) = \exp \mathbf{A}(t)$ , kde  $\mathbf{A}$  se nazývá infinitezimální maticí. Přitom

$$\exp(\mathbf{A}t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^m}{m!}$$

a platí  $d\mathbf{g}(t)/d(t)|_{t=0} = \mathbf{A}$ . Označuje-li  $\mathbf{a}$  tečný vektor v jednotce křivky  $\mathbf{g}(t)$ , získáme jednoznačnou korespondenci  $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{A}$  mezi algebrou  $\mathfrak{g}(G)$  a množinou všech infinitezimálních matic  $\mathfrak{g}^*(G)$ . Přitom součet a násobení skalárem se v této korespondenci zachovává. Ještě dodejme, že vektoru  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  odpovídá matice  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}$ .

Orbita  $g(t)$  zobecněného tuhého setrvačnicku je zadána křivkou  $\mathbf{g}(t)$  v  $\mathfrak{g}$ :  $\mathbf{g}(t) = \exp(\mathbf{A}t)$ . Pro  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{0}$  platí rozvoj  $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{A}} + 2^{-1}[\mathbf{A}, \dot{\mathbf{A}}] + O(\mathbf{A}^2)$ . Snadno se o tom přesvědčíme, neboť  $\exp \mathbf{A} \exp(\varepsilon \mathbf{\Omega}) = \exp(\mathbf{A} + \varepsilon \dot{\mathbf{A}} + O(\varepsilon^2)) \exp \mathbf{A} \exp \mathbf{B} = \exp(\mathbf{A} + \mathbf{B} + 2^{-1}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] + O(\mathbf{A}^2) + O(\mathbf{B}^2))$  pro matice  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{0}$ . Odtud dostáváme předchozí vztah pro  $\mathbf{\Omega}$ .

V proměnných  $\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}$  pro  $\mathfrak{g}$  z dostatečně malého okolí jednotky grupy  $G$  lze Lagrangeovu funkci (9.1) zapsat ve tvaru  $A(\mathbf{g}, \dot{\mathbf{g}}) = L(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}})$ ,  $r^2(\mathbf{g}, \dot{\mathbf{g}}) = T(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}})$ ,  $U = U(\mathbf{a})$ . Nutná podmínka extrému funkcionálu  $L$  je vyjádřena Eulerovou-Lagrangeovou rovnicí (v souřadnicích  $\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}$ )

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{a}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{a}} = 0.$$

Poznámka 11: symbol  $O(h^p)$  ( $p$  je přirozené číslo), popisuje asymptotické chování chyby aproximace pro  $h \rightarrow 0$ . Platí-li

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h^p} = C \neq 0,$$

píšeme  $f(h) = O(h^p)$ . Tento fakt pak vystihuje vztah

$$f(h) = Ch^p + O(h^{p+1});$$

v rozvoji  $f$  do mocnin  $h$  tedy chybí členy  $h^0, h, \dots, h^{p-1}$ .

Položme  $\mathbf{a}(0) = 0$ . Tehdy  $\dot{\mathbf{a}}(0) = \mathbf{\Omega}$ . S přihlédnutím k tomuto zápisu a vztahu pro  $L(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}})$  dojdeme k rovnici ( $L(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}})$  je prvek  $\mathfrak{g}^*$ )

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{a}}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{a}}} = \mathbf{M} - 2^{-1} \text{ad}_{\mathbf{a}}^* \mathbf{M} + O(a^2).$$

Poté dostáváme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}})}{\partial \dot{\mathbf{a}}} \Big|_{\mathbf{a}=0} = \dot{\mathbf{M}} - 2^{-1} \text{ad}_{\mathbf{\Omega}}^* \mathbf{M}.$$

Výpočtem gradientů  $\partial T / \partial \mathbf{a}$ ,  $\partial U / \partial \mathbf{a}$  získáme vztahy

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{a}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{a}},$$

$$\frac{\partial T(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}})}{\partial \mathbf{a}} \Big|_{\mathbf{a}=0} = 2^{-1} \text{ad}_{\mathbf{a}}^* \mathbf{M} = 2^{-1} \text{ad}_{\mathbf{\Omega}}^* \mathbf{M},$$

$$\begin{aligned} \left. \left( \frac{\partial U}{\partial \mathbf{a}}, \boldsymbol{\xi} \right) \right|_{\mathbf{a}=0} &= \int \rho(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \Phi(f(\exp \mathbf{a}, \mathbf{x})), \boldsymbol{\xi} \right) d\mu(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{a}=0} \\ &= \int \rho(\mathbf{x}) (d_{\mathbf{x}} \varphi, f_* \boldsymbol{\xi}) d\mu(\mathbf{x}) = -(\mathbf{K}_{\varphi}, \boldsymbol{\xi}); \end{aligned}$$

v posledním zápisu uvážíme definiční vztah pro moment vnějších sil  $\mathbf{K}_{\varphi}$ . Na základě zde napsaných formulí posléze dospíváme k pohybové rovnici zobecněného tuhého setrvačnicku ve tvaru (9.2). Rovnice (9.2) platí pro všechna  $t$  a nezávisí na předpokladu  $g(0) = e$ .

Jestliže vyjdeme ze souřadnicového systému pevně zvoleného v prostoru a chceme-li v něm napsat rovnici (9.2), je třeba přejít od veličin spojených s tuhým tělesem k veličinám vztaženým na prostor. To lze provést pomocí koadjungované reprezentace  $\text{Ad}$  grupy  $G$  na  $\mathfrak{g}$ :  $\text{Ad}_g a = g a g^{-1}$  pro  $g \in G$ ,  $a \in \mathfrak{g}$ . S operátorem  $\text{Ad}_g$  na  $\mathfrak{g}$  je spojen konjugovaný operátor  $\text{Ad}^*$  na  $\mathfrak{g}^*$ . Budiž  $g(t)$  orbita zobecněného těžkého setrvačnicku. V souřadnicovém systému pevně zvoleném v prostoru pak jsou dány vektorové veličiny: úhlová rychlost v prostoru  $\boldsymbol{\omega}(t) = \text{Ad}_{g(t)} \boldsymbol{\Omega}(t)$ , moment hybnosti (kinetický moment) v prostoru  $\mathbf{m}(t) = \text{Ad}_{g^{-1}(t)}^* \mathbf{M}(t)$ , hustota v prostoru  $R(\mathbf{x}, t) = \rho(f(g^{-1}(t), \mathbf{x}))$  a moment vnějších sil v prostoru  $\mathbf{k}_{\varphi} = \text{Ad}_{g^{-1}(t)}^* \mathbf{K}_{\varphi}$ . Podle definice je

$$\dot{R}(\mathbf{x}, t) = -(d_{\mathbf{x}} R(x, t), f_* \boldsymbol{\omega}(t)),$$

kde  $d_{\mathbf{x}} R(\mathbf{x}, t)$  je gradient funkce  $R(\mathbf{x}, t)$ . Rovnice (9.2) poté nabývá tvaru

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{k}_{\varphi}. \quad (9.3)$$

Hodnota momentu  $\mathbf{k}_{\varphi} \in \mathfrak{g}^*$  pro  $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{g}$  je dána integrálem

$$(\mathbf{k}_{\varphi}, \boldsymbol{\xi}) = - \int R(\mathbf{x}, t) (d_{\mathbf{x}} \Phi, f_* \boldsymbol{\xi}) d\mu(\mathbf{x}) = (\text{Ad}_{g^{-1}(t)}^* \mathbf{K}_{\varphi}, \boldsymbol{\xi}).$$

K odvození vztahu (9.3) z (9.2) je užitečná formule  $(d/dt) \text{Ad}_{g^{-1}(t)} \boldsymbol{\xi} = \left[ \text{Ad}_{g^{-1}(t)} \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega}(t) \right]$ ,  $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{g}$ , vyplývající ze zápisu pro úhlovou rychlost v souřadnicovém systému pevně spojeným s tělesem. Poté bude

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{m}}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{d}{dt} (\mathbf{m}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{d}{dt} (\text{Ad}_{g^{-1}(t)}^* \mathbf{M}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{d}{dt} (\mathbf{M}, \text{Ad}_{g^{-1}(t)} \boldsymbol{\xi}) = \\ &= (\dot{\mathbf{M}}, \text{Ad}_{g^{-1}(t)} \boldsymbol{\xi}) + (\mathbf{M}, \left[ \text{Ad}_{g^{-1}(t)} \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega}(t) \right]) = \\ &= (\dot{\mathbf{M}} - \text{ad}_{\boldsymbol{\Omega}(t)}^* \mathbf{M}, \text{Ad}_{g^{-1}(t)} \boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{K}_{\varphi}, \text{Ad}_{g^{-1}(t)} \boldsymbol{\xi}) = (\text{Ad}_{g^{-1}(t)}^* \mathbf{K}_{\varphi}, \boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{k}_{\varphi}, \boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$

a formule (9.3) je dokázána.

Eulerovy-Lagrangeovy rovnice zobecněného těžkého setrvačnicku zapsané v prostoru duálním k algebře  $\mathfrak{g}$  lze uvést v jazyku samotné algebry  $\mathfrak{g}$ . K tomu nám poslouží operátor  $A_g^{-1}: T^*(G_g) \rightarrow T(G_g)$  ( $A(G)$  je inerciálním operátorem), tedy  $A^{-1}: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$ . V našem případě je prostor duální k algebře (tedy  $\mathfrak{g}^*$ ) prostorem momentů hybnosti. Vektor momentu hybnosti leží v kotečném prostoru ke grupě  $G$  v bodě  $g$  a lze ho převést do jednotky grupy levou či pravou translací. Uvažujeme-li Eulerův-Lagrangeův systém na  $G$  s Lagrangeovou funkcí  $A(g, \dot{g}) = T(\boldsymbol{\omega}) - U(g)$ ,  $\boldsymbol{\omega} = R_{g^{-1}} \dot{g} \in \mathfrak{g}$ ,  $g \in G$ , přechází (9.3) na

$$\dot{\boldsymbol{m}} = -\text{ad}_{\boldsymbol{\omega}}^* \boldsymbol{m} + \boldsymbol{k}_{\Phi}. \quad (9.4)$$

Forma  $2T(\boldsymbol{\omega})$  definuje pravoinvariantní Reimannovu metriku na  $G$ . Jestliže tedy kinetická energie zobecněného těžkého setrvačnicku zadává pravoinvariantní Reimannovu metriku, pro  $\boldsymbol{m}$  platí (9.4) a  $\boldsymbol{\omega}$  splňuje rovnici

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -B(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{k}(\Phi),$$

kde je  $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})_{\mathfrak{g}}$  skalární součin na  $\mathfrak{g}$ , daný kvadratickou formou  $2T(\boldsymbol{\xi})$ ,  $(\boldsymbol{k}(\Phi), \boldsymbol{\xi})_{\mathfrak{g}} = (\boldsymbol{k}_{\Phi}, \boldsymbol{\xi})$ ;  $B(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$  je element  $\mathfrak{g}$  takový, že  $(B(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}), \boldsymbol{\xi})_{\mathfrak{g}} = (\boldsymbol{\xi}, [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}])_{\mathfrak{g}}$ .

Poznámka 12: abychom se přesvědčili, že  $2T(\boldsymbol{\omega})$  určuje na  $G$  pravoinvariantní metriku, uvažme zápis  $\boldsymbol{\omega} = R_{g^{-1}} \dot{\boldsymbol{g}} \in \mathfrak{g}$ . Dále nechť  $\exp(\boldsymbol{\omega} \tau)g(t)$ ,  $g(t) \in G$ ,  $\boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{g}$ ,  $\tau \ll 1$  je přenos odpovídající pohybu  $g$  při elementárním pootočení úhlovou rychlostí  $\boldsymbol{\omega}$  v čase  $\tau \ll 1$ . Funkce  $\exp(\boldsymbol{\omega} \tau)$  ( $\boldsymbol{\omega}$  je infinitezimální matice) tvoří jednoparametrickou grupu rotací s úhlovou rychlostí  $\boldsymbol{\omega}$ . Jestliže  $\dot{\boldsymbol{g}} = (d/d\tau)_{\tau=0} \exp(\boldsymbol{\omega} \tau)g$ , je zřejmé, že  $\boldsymbol{\omega}$  získáme z  $\dot{\boldsymbol{g}}$  pravou translací. Tvzení o tom, že kinetická energie pohybující se tekutiny určuje také pravoinvariantní Reimannovu metriku na grupě difeomorfismů  $S\text{Diff}D$  proudové oblasti  $D$  se dokazuje analogicky. Ukáže se, že pole rychlosti  $\boldsymbol{v}$  se získá z vektoru  $\dot{\boldsymbol{g}}$  tečného ke grupě v  $g$  pravou translací.

## 10 POHYBOVÉ ROVNICE $n$ -DIMENZIONÁLNÍHO TĚŽKÉHO SETRVAČNÍKU

Těžké  $n$ -dimenzionální těleso je zvláštním případem zobecněného těžkého setrvačnicku s grupou  $G = SO(n)$  ortogonálních pohybů s operací  $G$  na Eukleidově prostoru  $\mathbf{R}^n = \mathbf{N}$  a s potenciálem  $\Phi$  ve směru homogenního pole  $\mathbf{F}$  na  $\mathbf{R}^n$ :  $\mathbf{F} = -\text{grad}\Phi = \text{konst}$ . Gradient potenciálu v souřadnicovém systému pevně spojeným s tělesem nezávisí na  $\mathbf{x}$ :  $-\text{grad}\varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Y}(t)$ ,  $|\mathbf{Y}(t)| = \text{konst}$  [6].

Nechť je těleso upevněno v bodě  $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ . Podle definice  $(\mathbf{K}_{\varphi}, \boldsymbol{\xi}) = -\int \rho(\mathbf{x})(d_{\mathbf{x}}\varphi, \mathbf{f}_*\boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x}$ , kde je  $d\mathbf{x}$  objemový element v Eukleidově prostoru  $\mathbf{R}^n$  a  $\boldsymbol{\xi}$  antisymetrická matice,  $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{so}(n)$ . Protože pro vektor  $\mathbf{f}_*\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$  dostáváme  $\mathbf{f}_*\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}$ , kde je  $\boldsymbol{\xi}$  odpovídající antisymetrický operátor, bude

$$(\mathbf{K}_{\varphi}, \boldsymbol{\xi}) = \int \rho(\mathbf{x})(\mathbf{Y}(t), \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})_n d\mathbf{x}, \quad (10.1)$$

kde je  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_n$  skalární součin vektorů v  $\mathbf{R}^n$ . Pro libovolnou dvojici vektorů  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$  lineární operátor  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  v  $\mathbf{R}^n$  je určen hodnotami skalárního součinu  $((\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{c}, \mathbf{d})_n$  pro všechna  $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbf{R}^n$ :

$$((\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{c}, \mathbf{d})_n = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{d})_n & (\mathbf{b}, \mathbf{d})_n \\ (\mathbf{a}, \mathbf{c})_n & (\mathbf{b}, \mathbf{c})_n \end{vmatrix}.$$

V ortonormované bázi v  $\mathbf{R}^n$  jsou maticové prvky operátoru  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  zadány vztahem  $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$ . Na algebře  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$  antisymetrických matic máme dán pozitivně definitní skalární součin  $\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = 2^{-1} \text{Tr}(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta})$  se součinem matic  $\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta}$ , lišící se konstantním faktorem od formy  $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \text{Tr}(\text{ad}_{\boldsymbol{\xi}}\text{ad}_{\boldsymbol{\eta}}) = (n-1)\text{Tr}(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta})$ . Pomocí skalárního součinu  $\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle$  ztotožníme

$\mathfrak{g}$  s  $\mathfrak{g}^*$ . Tehdy  $\text{ad}_\eta^* \xi = -[\eta, \xi] = -\text{ad}_\eta \xi$ , kde  $\eta \in \mathfrak{g}$ ,  $\xi \in \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$ . Můžeme se přesvědčit, že pro  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  a  $\xi \in \mathfrak{g}$  dostaneme

$$(\mathbf{a}, \xi \cdot \mathbf{b})_n = \langle \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \xi \rangle. \quad (10.2)$$

Z (10.2) vyplývá, že  $(\mathbf{K}_\varphi, \xi)_\mathfrak{g} = (\boldsymbol{\gamma}(t), \xi \cdot \mathbf{p})_n = -\langle \mathbf{p} \wedge \boldsymbol{\gamma}(t), \xi \rangle$ , kde  $\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} \, d\mathbf{x}$  je polohový vektor těžiště (v tělese). Poznamenejme, že  $\boldsymbol{\gamma}(t) = g^{-1}(t)\mathbf{F}(g(t))$  je orbita na konfiguračním prostoru  $SO(n)$ . Při ztotožnění  $\mathfrak{g}$  a  $\mathfrak{g}^*$  pomocí skalárního součinu  $\langle \xi, \eta \rangle$  bude  $\mathbf{K}_\varphi = -\mathbf{p} \wedge \boldsymbol{\gamma}(t) \in \mathfrak{g}$  a z (9.2) nalezneme pohybovou rovnici  $n$ -dimenzionálního tuhého setrvačnicku v homogenním poli  $\mathbf{F}$  ve tvaru

$$\dot{\mathbf{M}} = [\mathbf{M}, \boldsymbol{\Omega}] + \boldsymbol{\gamma}(t) \wedge \mathbf{p}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = -\boldsymbol{\Omega}(t)\boldsymbol{\gamma}(t). \quad (10.3)$$

Rovnice (9.3) a vztah  $\dot{R}(\mathbf{x}, t) = -(\text{d}_x R(\mathbf{x}, t), \mathbf{f}_{*\omega}(t))$ , s nímž jsme se setkali v předchozím odstavci, pro odpovídající veličiny v souřadnicovém systému v prostoru nabývají formy

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{F} \wedge \mathbf{P}(t), \quad \dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t)\mathbf{P}(t), \quad (10.4)$$

v níž je  $\mathbf{P}(t) = g(t)\mathbf{p}$  polohový vektor těžiště,  $\boldsymbol{\omega}(t) = \text{Ad}_{g(t)} \boldsymbol{\Omega}(t) = g\boldsymbol{\Omega}g^{-1}(t)$  udává orbitu v  $SO(n)$ .

Lagrangeova funkce  $n$ -dimenzionálního tuhého tělesa zůstává zachována při ortogonálních transformacích  $\mathbb{R}^n$ , zachovávajících pole  $\mathbf{F}$ . S přihlédnutím k teorému Noetherové budou existovat integrály pohybu odpovídající jednoparametrickým podgrupám  $h(s) \subset G$ , ( $h(s)\mathbf{F} = \mathbf{F}$ ) transformací konfiguračního prostoru  $G$ , zachovávajících Lagrangeovu funkci. V tomto případě lze vyjádřit integrály v explicitním tvaru. Je třeba uvážit k  $\mathbf{F}$  ortogonální vektory  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  v  $\mathbb{R}^n$ , tedy  $(\mathbf{a}, \mathbf{F})_n = (\mathbf{b}, \mathbf{F})_n = 0$  a poté výraz definovaný předpisem  $\langle \mathbf{m}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \rangle$ , je integrálem pohybu příslušející podgrupě rotací  $\mathbb{R}^n$ . Ještě si povšimněme, že podle (10.4)  $(\text{d}, \text{d}t)\langle \mathbf{m}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \rangle = -\langle \mathbf{P}(t) \wedge \mathbf{F}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \rangle$  a z (10.2) dostáváme, že  $\langle \mathbf{P}(t) \wedge \mathbf{F}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \rangle = (\mathbf{P}(t), (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{F})_n = 0$ , neboť s přihlédnutím ke vztahu, jímž je dán vektorový součin  $((\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{c}, \mathbf{d})_n$ , bude  $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{F} = 0$ , jestliže  $(\mathbf{a}, \mathbf{F})_n = (\mathbf{b}, \mathbf{F})_n = 0$ .

Nechť  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  je ortonormovaná báze v  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{F}/|\mathbf{F}|$ . Tehdy integrály  $\langle \mathbf{m}, \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \rangle$  pro  $2 \leq i < j \leq n$  tvoří bázi v lineárním prostoru, vytvořeném integrály pohybu  $\langle \mathbf{m}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \rangle$ . Dimenze podprostoru v  $\mathfrak{g}$ , ge-



nerovaného  $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$ ,  $2 \leq i < j \leq n$ , je  $(n-1)(n-2)/2$  a je o  $(n-1)$  menší než dimenze  $\mathfrak{g}$ , rovná  $n(n-1)/2$ . V souřadnicovém systému pevně spojeném s tělesem, integrály  $\langle \mathbf{m}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \rangle$  mají tvar  $\langle \mathbf{M}, \mathbf{A}(t) \wedge \mathbf{B}(t) \rangle$  kde  $\dot{\mathbf{A}} = -\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}$ ,  $\dot{\mathbf{B}} = -\boldsymbol{\Omega}\mathbf{B}$ . Systém (10.3) má integrály pohybu  $E = 2^{-1} \langle \mathbf{M}, \boldsymbol{\Omega} \rangle - (\mathbf{p}, \boldsymbol{\gamma})_n$  (integrál energie) a dále integrál  $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})_n$ . Pro  $n=3$ , rovnice (10.3) se shodují s Eulerovými-Poissonovými pohybovými rovnicemi těžkého setrvačnicku s jednotkovou hmotností. Integrál pohybu  $\langle \mathbf{m}, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \rangle$  pro  $n=3$  značí zachování projekce kinetického momentu do směru pole  $\mathbf{F}$ .

# 11 INTEGRACE KOMPLEXNÍ ANALOGIE POHYBOVÝCH ROVNIC $n$ -DIMENZIONÁLNÍHO TĚŽKÉHO TĚLESA

Eulerova rovnice ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{M}}{dx} = [\mathbf{M}, \mathbf{\Omega}], \quad (11.1)$$

v níž  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{\Omega}$  jsou komplexní matice s nulovou hlavní diagonálou,  $\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}\mathbf{A}$  a kde  $\mathbf{A}$  je diagonální matice s prvky  $a_i$ , je při reálných antisymetrických maticích  $\mathbf{\Omega}$  pohybovou rovnicí  $n$ -dimenzionálního tuhého tělesa. Matice  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{x})$  jsou jednoznačně vyjádřeny pomocí komplexního potenciálu  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  s nulovou hlavní diagonálou:  $\mathbf{\Omega} = [\mathbf{A}, \mathbf{V}]$ ,  $\mathbf{M} = [\mathbf{A}^2, \mathbf{V}]$ . Tím, že se při integraci jisté třídy  $B$ -systémů setkáváme s rovnicí (11.1), nabízí se možnost integrovat systém (11.1) zobecněním integrace  $B$ -systému v trojdimenzionálním prostoru; konkrétně se jedná o rovnici geodetiky na trojdimenzionálním anuloidu. Všimněme si, že rovnice (11.1) má tvar  $H$ -systému (oddíl. 3)

$$\dot{x}_{ij} = \frac{a_i - a_j}{a_i + a_j} \frac{\partial F}{\partial x_{ij}}, \quad x_{ii} \equiv 0,$$

$$\mathbf{\Omega} = (x_{ij}), \quad F = 3^{-1} \sum_{i,j,k} x_{ij} x_{jk} x_{ki}$$

s maticí symetrizátoru, která je antisymetrická a při rozdílných dvojicích  $a_i$  je nedegenerovaná.

Platí, že rovnice (11.1) může být přepsána do tvaru

$$\frac{d(\mathbf{M} - \xi \mathbf{A}^2)}{dx} = [\mathbf{M} - \xi \mathbf{A}^2, \mathbf{\Omega} - \xi \mathbf{A}] \quad (11.2)$$

s komplexním parametrem  $\xi$ , která je ze třídy stacionárních rovnice typu Kortewega de Vriesa v maticovém tvaru.

Zastavme se u této rovnice a uveďme si některé její vlastnosti. Úvodem poznamenejme, že ne všechny první integrály rovnic klasické mechaniky implikuje explicitní symetrie úlohy (např. specifické integrály Keplerovy úlohy či úlohy o geodetikách na elipsoidu). V takových případech hovoříme o „skryté symetrii“ a zajímavý případ takové skryté symetrie poskytuje právě Kortwegova de Vriesova rovnice  $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$  (indexy jako obvykle představují parciální derivace podle příslušných proměnných). Je to nelineární parciální diferenciální rovnice, která se prvně objevila v teorii mělké vody. Posléze jsme se s ní mohli setkat v řadě úloh matematické fyziky, včetně úlohy o pohybu zobecněného tuhého tělesa.

Při numerických experimentech s touto rovnicí byla zjištěna udivující vlastnost jejích řešení s nulovými okrajovými podmínkami v nekonečnu: tato řešení se pro  $t \rightarrow \pm\infty$  „rozpadají“ na solitony. Slovo soliton je v současné době používáno v různých kontextech, třeba založených na pojmu metody obráceného rozptylu [15]. Nám zde postačí, když řekneme, že solitony jsou vlny určité formy, pohybující se různými rychlostmi.

Věnujme pozornost následujícímu příkladu, převzatému z [14]. Abychom dostali soliton pohybující se rychlostí  $c$ , stačí do jmenované rovnice dosadit výraz  $u = \varphi(x - ct)$ . Dojdeme k rovnici  $\varphi_{tt} = 3\varphi^2 + c\varphi + d$ , kde  $d$  je parametr. Je to Newtonova rovnice s kubickým potenciálem. Na fázové rovině  $(\varphi, \varphi_t)$  se u ní setkáváme s fázovým portrétem typu sedla. Separatrix vycházející ze sedla a do něho se vracějící (v něm je  $\varphi = 0$ ) udává řešení směřující k nulovému bodu pro  $x \rightarrow \pm\infty$  a toto řešení je solitonem. Třebaže při „srážkách“ solitonů dochází k dosti složitým nelineárním interakcím, z numerické analýzy vyplývá, že rozměry a rychlosti solitonů se nemění. Tato skutečnost nachází reálný protějšek v zákonech zachování [14,15].

Uvažme Sturmův-Liouvilleův operátor závisející na funkci  $u(x)$   $L = -\partial^2 + u$ . Pak platí, že Kortwegova de Vriesova rovnice je ekvivalentní rovnici  $u_t = [L, A]$ , kde  $A = 4\partial^3 - 3(u\partial + \partial u)$ . Důsledkem tohoto teorému je následující tvrzení: Operátory  $L$  jsou pro všechna  $t$  unitárně ekvivalentní a tak každé z vlastních čísel  $\lambda$  Sturmůvy-Liouvilleovy úlohy  $Lf = \lambda f$  s nulovými podmínkami v nekonečnu představuje první integrál Kortwegovy de Vriesovy rovnice [14,15]. Tyto integrály mají tvar  $I_s = \int P_s(u, \dots, u^{(s)}) dx$ , kde  $P_s$  je polynom. Poznamenejme, že každý integrál  $I_s$  určuje „vyšší Kortwegovu de Vriesovu rovnici“ tvaru  $u_t = Q_s[u]$ , kde  $Q_s = (d/dx)(\delta I_s / \delta u)$  je polynom závisející na  $u, u', \dots, u^{2s+1}$ . Integrály  $I_s$  jsou v involuci a jim odpovídající toky ve funkcionálním prostoru komutují. Explicitní tvary polynomů  $P_s$  a  $Q_s$  jsou popsány v termínech řešení přímé a obrácené úlohy teorie rozptylu na potenciálu  $u$  [14,15].

Důvod, proč zde hovoříme o potenciálu vychází z možnosti zapsat Koertewegovu de Vriesovu rovnici jako podmínku integrability jiného systému nelineárních rovnic určeného parametrem  $k$  a (jakoby známým) řešením zkoumané rovnice. Snadno lze ověřit, že splňuje-li  $f(x, t)$  soustavu rovnic  $f_{xx} = (u(x, t) - k^2)f$ ,  $-f_t = (4\partial_{xxx}^3 - 6u\partial_x - 3u_x)f$ , pak z podmínky  $f_{xxt} = f_{txx}$  plyne rovnice  $u_t + u_{xxx} - 6u_x u = 0$ . Ukazuje se, že podmínky integrability lze charakterizovat též pomocí tzv. Laxova páru operátorů nebo jako podmínka nulové křivosti jakési variety. Pro nás je zde podstatně důležitější skutečnost, že v druhé z uvedených rovnic proměnná  $t$  (čas) vystupuje jako parametr. Tato rovnice je dobře známa jako Schrödingerova bezčasová rovnice neboli Sturmův-Liouvilleův spektrální problém. Souvislost Cauchyho úlohy s prvou zde napsanou rovnicí tkví v tom, že řešení Kortewegovy de Vriesovy rovnice vystupuje v prvním zápisu jako „potenciál kvantově mechanického systému“. Fyzikálně nanejvýš důležitá úloha je určení potenciálu  $u(x)$  ( $t$  je zde pouze parametr) z měřitelných dat kvantového systému. Tato úloha se nazývá obrácenou úlohou rozptylu.

Nyní s přihlédnutím k [6] již můžeme obrátit pozornost k stacionární rovnici typu Kortewega de Vrieseho zapsané v maticovém tvaru.

Ve stacionárních maticových rovnicích tohoto typu neznámou je potenciál, který zde označíme  $\mathbf{V}(x)$ , aby nedošlo k záměně s rychlostí  $u$ .  $\mathbf{V}(x)$  nabývá hodnot v komplexních maticích  $n$ -tého řádu s nulovou hlavní diagonálou. Budiž  $\mathbf{A}$  právě taková matice s po dvojicích rozdílnými vlastními hodnotami,  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_A = [\mathbf{A}, \mathbf{V}] - \zeta \mathbf{A}$ , kde  $\zeta$  je komplexní parametr. Řešení rovnice

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = [\mathbf{R}, \mathbf{Q}_A] \quad (11.3)$$

pišme ve tvaru formální řady  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \zeta^{-1}\mathbf{R}_1 + \zeta^{-2}\mathbf{R}_2 + \dots$  takové, že  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{B}$  je nezávislejší na  $x$  diagonální komplexní matice s po dvojicích rozdílnými vlastními hodnotami  $b_i$ .  $\mathbf{R}_j$  je polynom v neurčitých  $\mathbf{V}$ ,  $d\mathbf{V}/dx, \dots, d^{j-1}\mathbf{V}/dx^{j-1}$  (s koeficienty ve tvaru racionálních funkcí diagonálních prvků matic  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ) a platí  $\mathbf{R}_j = 0$  pro  $\mathbf{V} = 0$ . Rovnice (11.3) je ekvivalentní nekonečnému systému rovnic

$$\begin{aligned} -[\mathbf{R}_0, \mathbf{A}] = 0, \quad \frac{d\mathbf{R}_0}{dx} &= [\mathbf{R}_0, [\mathbf{A}, \mathbf{V}]] - [\mathbf{R}_1, \mathbf{A}] = 0, \\ &\vdots \\ \frac{d\mathbf{R}_j}{dx} &= [\mathbf{R}_j, [\mathbf{A}, \mathbf{V}]] - [\mathbf{R}_{j+1}, \mathbf{A}]. \\ &\vdots \end{aligned} \quad (11.4)$$

Z (11.4) pro  $d\mathbf{R}_j/dx$  vyplývá, že prvky matice  $\mathbf{R}_{j+1}$  neležící v hlavní diagonále jsou polynomy v neurčitých – prvků matic  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{R}_j$ ,  $d\mathbf{R}_j/dx$ . Snadno nahlédneme, že formální řada  $\text{Tr}((\mathbf{R}(x))^k)$  nezávisí na  $x$ . Standardním řešením systému (11.4) nazvěme formální (podle  $\zeta^{-1}$ ) řadu  $\mathbf{R}(x)$  vyhovující (11.4), a takovou, že pro  $k=1, 2, \dots, n$  máme  $\text{Tr}((\mathbf{R}(x))^k) = \text{Tr}(\mathbf{R}_0^k) \equiv \text{Tr}(\mathbf{B}^k)$ . Těmito podmínkami jsou určeny diagonální prvky matic  $\mathbf{R}_j$ . Najdeme je z lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \text{Tr} \mathbf{R}_j &= 0, & \text{Tr}(\mathbf{R}_0 \mathbf{R}_j) &= c_1(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{j-1}), \\ & \vdots & & \\ \text{Tr}(\mathbf{R}_0^{n-1} \mathbf{R}_j) &= c_{n-1}(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{j-1}). \end{aligned} \quad (11.5)$$

Determinant matice koeficientů systému (11.5)

$$V_n(b_1, b_2, \dots, b_n) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1 \\ b_1 & b_2 & \dots, & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1^{n-1}, & b_2^{n-1}, & \dots, & b_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

je determinant Vandermondův ( $b_i = b_{ii}$  jsou diagonální prvky matice  $\mathbf{B}$ ). Pro tento determinant platí

$$V_n(b_1, b_2, \dots, b_n) = \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{i=k+1}^n (b_i - b_k).$$

Vandermondův determinant  $V_n(b_1, b_2, \dots, b_n)$  se rovná nule právě tehdy, když alespoň dva z jeho prvků  $b_1, b_2, \dots, b_n$  se sobě rovnají. Cramerovo pravidlo aplikované na řešení systému lineárních rovnic  $\text{Tr} \mathbf{R}_j = 0$ ,  $\text{Tr}(\mathbf{R}_0 \mathbf{R}_j) = c_1(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{j-1})$ , ... nám umožňuje získat doplňující vyjádření pro diagonální prvky  $\mathbf{R}_j$  v závislosti na prvcích matice  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_{j-1}$ .

Nyní si již řekněme, že stacionární rovnicí typu Kortewega de Vrieseho rozumíme zápis

$$[\mathbf{A}, \mathbf{R}_{N+1}] = 0, \quad (11.6)$$

kde  $\mathbf{R}_{N+1} = \mathbf{R}_{N+1, \mathbf{B}}$  jsou koeficienty u  $\zeta^{-(N+1)}$  standardního řešení systému (11.4). Pokud potenciál  $\mathbf{V}(x)$  vyhovuje rovnici (11.6), platí

$$\frac{d\mathbf{R}_N}{dx} = [\mathbf{R}_N, [\mathbf{A}, \mathbf{V}]]. \quad (11.7)$$

Mezi (11.7) a (11.6) platí vztah ekvivalence a můžeme položit

$$\mathbf{F}_N \left( \mathbf{V}, \frac{d\mathbf{V}}{dx}, \dots, \frac{d^N \mathbf{V}}{dx^N} \right) = 0,$$

kde  $\mathbf{F}_N$  je matice sestavená z homogenních polynomů stupně  $N+1$  (počítáme s tím, že  $\mathbf{V}$  a  $d/dx$  mají stupeň jedna), s koeficienty racionálními v  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ .

K zápisu (11.6) dodejme: Rovnice  $f_{xx} = (u(x,t) - k^2)f$ ,  $-f_t = (4\partial_{xxx}^3 - 6u\partial_x - 3u_x)f$  lze zapsat též ve tvaru  $Lf = k^2f$ ,  $-f_t = Af$ , kde  $L, A$  jsou lineární operátory, pro které platí  $L = -\partial_{xx}^2 + u(x,t)$ ,  $A = 4\partial_{xxx}^3 - 6u\partial_x - 3u_x$ . Rovnice Kortewegova de Vriesova je tak ekvivalentní podmínce  $L_t = [L, A]$ , která je též ekvivalentní požadavku nezávislosti vlastních hodnot operátorů  $L$  na čase. Právě rovnice  $[\mathbf{A}, \mathbf{R}_{N+1}] = 0$  může být zapsána ve tvaru komutátoru  $[L_A, A] = 0$ , kde  $L_A = d/dx + Q_A \equiv d/dx + [\mathbf{A}, \mathbf{V}] - \xi \mathbf{A}$ ,  $A = \mathbf{A}_{N,B} = \xi^{N_B} + \xi^{N-1}R_1 + \dots + R_N$ , kde  $R_j = R_{j,B}$  jsou koeficienty u  $\xi^j$  ve standardním řešení systému (11.4). Platnost tohoto tvrzení je zřejmá, neboť podmínka  $[L_A, A] = 0$  je ekvivalentní rovnici  $dA/dx = [A, [\mathbf{A}, \mathbf{V}] - \xi \mathbf{A}]$  a ta je ekvivalentní rovnici  $[\mathbf{A}, \mathbf{R}_{N+1}] = 0$ . V [6] je zmínka o tom, že  $[L_A, A] = 0$  s operátory  $L_A$  a  $A$  polynomicky závislejšími na parametru  $\xi$ , se nazývají Novikovovou reprezentací rovnice  $[\mathbf{A}, \mathbf{R}_{N+1}] = 0$ .

Je na místě zde říci, že dříve uvedená stacionární skalární „vyšší Kortewegova de Vriesova rovnice“ pro téměř periodický potenciál  $u(x)$  rovněž připouští Novikovovu reprezentaci s maticemi druhého řádu

$[d/dx + \mathbf{Q}_1, A_1] = 0$ , kde  $\mathbf{Q}_1 = \begin{vmatrix} 0 & \xi - u \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$  v odpovídající bázi v prostoru řešení rovnice  $L_1\varphi \equiv (-d^2/dx^2 + u - \xi)\varphi = 0$  na přímce, a  $A_1$  pro  $n$ -tou skalární Kortewegovu de Vriesovu rovnici je polynomicky (v téže bázi) vyjádřeno pomocí  $\xi, u, du/dx, \dots, d^{2n}u/dx^{2n}$ .

Rovnici (11.7) pro  $N=1$  (s přihlédnutím k systému (11.4)) můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}_0}{dx} &= [\mathbf{R}_0, [\mathbf{A}, \mathbf{V}]] = [\mathbf{R}_1, \mathbf{A}] = 0, \quad [\mathbf{R}_0, \mathbf{A}] = 0, \\ \frac{d\mathbf{R}_1}{dx} &= [\mathbf{R}_1, [\mathbf{A}, \mathbf{V}]]. \end{aligned} \tag{11.8}$$

Snadno se přesvědčíme, že diagonální prvky matice  $\mathbf{R}_1$  jsou nulové, neboť systém (11.5) pro  $j=1$  má pravé strany rovné nule.

Poznámka 13: Novikovy studie Kortewegovy de Vriesovy rovnice s periodickými okrajovými podmínkami vedly k zajímavé třídě plně integrabilních systémů s konečným počtem stupňů volnosti. Naznačíme zde, alespoň v hrubých rysech cestu, po níž k takovým systémům dospějeme. Vyjdeme z jakékoliv konečné lineární kombinace prvních integrálů Kortewegovy de Vriesovy rovnice  $I = \sum c_i I_{n-i}$  a nechť  $c_0 = 1$ . Ukazuje se, že množina stacionárních bodů toku s hamiltoniánem  $I$  je ve funkcionálním prostoru invariantní vůči fázovému toku s hamiltoniánem  $I_s$ , jmenovitě vůči fázovému toku rovnice  $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$ . Na druhé straně tyto stacionární body určíme z rovnice

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\delta I}{\delta u} \right) = 0, \quad \text{či} \quad \frac{\delta I}{\delta u} = 0.$$

Poslední zápis představuje Eulerovu-Lagrangeovu rovnici pro funkcionál  $I - dI_1$ . Je to rovnice  $2n$ -tého řádu a může být zapsána jako systém Hamiltonových rovnic v  $2n$ -dimenzionálním Euklidově prostoru. Získaný hamiltonovský systém s  $n$  stupni volnosti má  $n$  integrálů v involuci a je plně integrabilní v souřadnicích akce-úhel. Tak dojdeme ke konečnědimenzionální soustavě partikulárních řešení Kortewegovy de Vriesovy rovnice, závisejících na  $3n+1$  parametrech ( $2n$  fázových souřadnicích a ještě  $n+1$  parametrech  $c_1, c_2, \dots, c_n; d$ ). Tato řešení, jak ukázal Novikov, mají pozoruhodné vlastnosti. Například v periodické úloze vedou na funkce  $u(\mathbf{x})$ , pro něž lineární diferenciální rovnice s periodickými koeficienty  $-X_{tt} + u(\mathbf{x})X = \lambda X$  má konečně mnoho zón parametrické rezonance na ose  $\lambda$ . (Jestliže parametry systému periodicky závisejí na čase, jeho rovnovážná poloha může být nestabilní a to dokonce tehdy, je-li stabilní při každé pevně zvolené hodnotě parametru. Díky takové nestabilitě můžeme rozhoupat houpačku).

Vraťme se k systému (11.8). Z podmínky  $[\mathbf{R}_0, \mathbf{A}] = 0$  plyne, že  $[\mathbf{R}_0, [\mathbf{A}, \mathbf{V}]] = -[\mathbf{A}, [\mathbf{V}, \mathbf{R}_0]]$  a pak na základě (11.8) máme  $-[\mathbf{A}, [\mathbf{V}, \mathbf{R}_0]] = [\mathbf{R}_1, \mathbf{A}] = -[\mathbf{A}, \mathbf{R}_1]$ . Protože matice  $\mathbf{R}_1$  a  $[\mathbf{V}, \mathbf{R}_0] = [\mathbf{V}, \mathbf{B}]$  mají nulové hlavní diagonály, bude  $\mathbf{R}_1 = [\mathbf{V}, \mathbf{R}_0]$ . Když nyní položíme  $\mathbf{\Omega} = [\mathbf{A}, \mathbf{V}]$ ,  $\mathbf{M} = -\mathbf{R}_1 = [\mathbf{R}_0, \mathbf{V}]$ , z (11.8) dostaneme, že

$$\frac{d\mathbf{M}}{dx} = [\mathbf{M}, \mathbf{\Omega}]. \quad (11.9)$$

Nediagonální prvky matice  $\mathbf{M} = (m_{ij})$  budou vyjádřeny pomocí prvků  $\mathbf{\Omega} = (x_{ij}) : m_{ij} = [(b_i - b_j)/(a_i - a_j)]x_{ij}$ . Jestliže totiž  $\mathbf{R}_0 \equiv \mathbf{B} = \mathbf{A}^2$ , bude  $m_{ij} = (a_i + a_j)x_{ij}$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}\mathbf{A}$ . Pokud v počátku  $\mathbf{x}_0$  matice  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{\Omega}$  jsou antisymetrické, pak tyto matice si tuto vlastnost zachovávají pro všechna  $\mathbf{x}$ . Pro diagonální matici  $\mathbf{A}$ , zadávající operátor (tenzor) setrvačnosti  $n$ -dimenzionálního tuhého tělesa, pro  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2$  systém (11.7) se na invariantním podprostoru antisymetrických matic shoduje s Eulerovými rovnicemi (11.9) pro pohyb  $n$ -dimenzionálního tuhého tělesa.

V souvislosti s Eulerovou rovnicí podotkněme, že pro  $N=1$  rovnice  $d\mathbf{A}/dx = [\mathbf{A}, \mathbf{Q}_A] \equiv [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{V}] - \xi \mathbf{A}]$  při volbě  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2$ ,  $\mathbf{M} = [\mathbf{B}, \mathbf{V}]$ ,  $\mathbf{\Omega} = [\mathbf{A}, \mathbf{V}]$  přechází na tvar

$$\frac{d}{dx}(\xi \mathbf{A}^2 - \mathbf{M}) = [\xi \mathbf{A}^2 - \mathbf{M}, \mathbf{\Omega} - \xi \mathbf{A}]. \quad (11.10)$$

Ze zápisu (11.10) rovnice pro  $[\mathbf{M}, \mathbf{\Omega}]$  vyplývá existence souboru integrálů pohybu  $a_{i,k}$  a úplná integrabilita pohybových rovnic  $n$ -dimenzionálního tuhého tělesa – hamiltonovského systému na orbitách koadjungované reprezentace ortogonální grupy  $SO(n)$ .



## 12 GEODETIKY NA RIEMANNOVÝCH VARIETÁCH

Přejdeme nyní od pohybových rovnic  $n$ -dimenzionálního tuhého tělesa k proudění dokonalé (nestlačitelné, nevazké) tekutiny v oblasti  $D$ . Jejím pohybu odpovídají difeomorfismy, tvořící grupu difeomorfismů  $S\text{Diff}D$ , zachovávajících element objemu oblasti  $D$ . Lieovu algebru  $\mathfrak{g}$  příslušející grupě  $S\text{Diff}D$  zadávají nedivergentní vektorová pole tečná k okraji  $\partial D$  (pokud  $\partial D \neq \emptyset$ ). Skalární součin dvou prvků  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  této algebry definujeme zápisem  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \int_D (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) d\mathbf{x}$ , kde je  $(, )$  skalární součin udávající

Riemannovu metriku na  $D$  a  $d\mathbf{x}$  značí Riemannův element, indukovaný touto metrikou.

Ukážeme, že kinetická energie pohybující se tekutiny – Riemannova metrika na grupě difeomorfismů  $S\text{Diff}D$  – je pravoinvariantní. Označme  $g_t$  difeomorfismus spojený s pohybem tekutiny po dobu  $t$ , jejíž rychlost je dána v tomto čase vektorovým polem  $\mathbf{v}$ . Tehdy v čase  $t + \tau$  ( $\tau$  je malá veličina) připadá v úvahu difeomorfismus  $\exp(\mathbf{v}\tau)g_t$ , kde  $\exp(\mathbf{v}\tau)$  je jednoparametrická grupa s vektorem rychlosti  $\mathbf{v}_t$ , tj. fázový tok zadaný polem  $\mathbf{v}$  diferenciální rovnice. Protože pole rychlosti  $\mathbf{v}$  získáme z vektoru  $\dot{\mathbf{g}}$  tečného ke grupě v bodě  $g$  pravou translací, rovněž kinetická energie tekutiny je pravoinvariantní. Při jednotkové hustotě je tato energie určena vztahem  $T = (1/2)\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ .

Vztah mezi geodetikou (její definici záhy uvedeme) a hydrodynamikou lze popsat následovně. Necht' geodetika  $\eta_t$  je prvkem grupy  $S\text{Diff}D$  Riemannovy variety s pravoinvariantní metrikou. Necht'  $\mathbf{v}_t = (d/dt) \eta_t$  je rychlost. Položme  $\mathbf{u}_t = \mathbf{v}_t \circ \eta_t^{-1}$ . Je tedy  $\mathbf{u}_t$  vektorové pole na varietě  $M$ , tečné k jejímu okraji  $\partial M$ . Lze ukázat, že řešení  $\mathbf{u}_t$  vyhovuje klasické Eulerově hydrodynamické rovnici pro dokonalou nestlačitelnou tekutinu ( $\mathbf{u}_t$  je zadáno pro  $t = 0$ ):

$$\frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{u}_t} \mathbf{u}_t = \text{grad } p,$$

$$\text{div } \mathbf{u}_t = 0.$$

V této rovnici je  $\nabla$  kovariantní derivace pole  $\mathbf{u}_t$  podle  $\mathbf{u}_t$  a funkce  $p: M \rightarrow \mathbb{R}^1$  udává tlak.

Nechť  $M$  je uzavřená dvojdimenzionální orientovaná hladká varieta vložená do  $\mathbb{R}^3$  a opatřená metrikou  $g_{ij}$ , indukovanou z  $\mathbb{R}^3$ . Nechť  $x^1, x^2$  jsou lokální souřadnice v nějakém okolí bodu z  $M$ . Je-li  $u^i$  kontravariantní složka nedivergentního vektorového pole na  $M$ , pak pro kovariantní derivaci  $\mathbf{u}$  podle  $\mathbf{u}$ , kterou označíme  $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}$ , dostáváme

$$(\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u})^i = u^k \nabla_k u^i = u^k \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i u^j \right),$$

kde je

$$\Gamma_{jk}^i = \sum_l \frac{1}{2} (\partial_j g_{kl} + \partial_j g_{jl} - \partial_l g_{jk}) g^{li}$$

a  $(g^{ji})$  je matice inverzní k matici  $(g_{ij})$ . Je-li  $\mathbf{u}$  vektorové pole na  $M$ ,  $\mathbf{u} \in TM$ , pak pro kovariantní derivaci máme

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = \nabla \frac{u^2}{2} - \mathbf{u} \times \text{rot}_n \mathbf{u},$$

$$\nabla = \text{grad}.$$

Je-li  $M$  jednotková kulová plocha  $S^2$  otáčející se s úhlovou rychlostí  $\boldsymbol{\omega}$ , pak Eulerova rovnice na  $M$  má tvar

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla \frac{u^2}{2} - \mathbf{u} \times \text{rot}_n \mathbf{u} + \mathbf{n}l \times \mathbf{u} = \text{grad } p,$$

$$\text{div } u = 0,$$

kde  $l = 2\omega \sin\varphi$  je Coriolisův parametr ( $\lambda, \varphi$  jsou zeměpisná délka a šířka),  $\mathbf{n}$  je vnější normála k  $M \equiv S^2$ . Za přítomnosti vazkosti  $\nu$  docházíme k Navierově-Stokesově rovnici v kovariantním tvaru

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla \frac{u^2}{2} - \mathbf{u} \times \text{rot}_n \mathbf{u} + \mathbf{n}l \times \mathbf{u} + \nu \text{rot rot}_n \mathbf{u} = \text{grad } p,$$

$$\text{div } u = 0.$$

Tato rovnice (v poněkud nestandardním tvaru) je dobře známá v dynamické meteorologii a je jednou z jednodušších rovnic popisujících velkoměřítkovou dynamiku barotropní atmosféry na rotující kulové ploše. Jsou dány funkcionální prostory, v nichž má dynamický systém generovaný Navierovou-Stokesovou rovnicí globální atraktor.

Nyní již obraťme pozornost na rovnici geodetiky. S výhodou přitom používáme Christoffelovy symboly prvního a druhého druhu, tj. symboly

$$[kl, m] = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} \right),$$

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ k \quad l \end{matrix} \right\} = g^{rm} [kl, m],$$

kde sčítáme podle  $m$ . V posledním vztahu je  $g^{rm} = g^{rm}(x^1, x^2, \dots, x^n)$  kontravariantní tenzor 2. řádu. Poté pro geodetiku dostáváme rovnici

$$\ddot{x}^r = \left\{ \begin{matrix} r \\ k \quad l \end{matrix} \right\} \dot{x}^k \dot{x}^l = 0, \quad (12.1)$$

$$r = 1, 2, \dots, n.$$

Tato rovnice reprezentuje kvazilineární systém diferenciálních rovnic pro funkce  $x^i(\lambda)$ . Parametr  $\lambda$  je afinním invariantem geodetiky. Na Riemannově varietě za  $\lambda$  můžeme vybrat délku oblouku křivky.

Povšimněme si, že v kartézském souřadnicovém systému, v němž jsou všechna  $\left\{ \begin{matrix} j \\ k \quad l \end{matrix} \right\}$  identicky rovna nule, se rovnice geodetiky redukuje na tvar

$\ddot{x} = 0$ . Souřadnice  $x_i$  jsou tedy lineárními funkcemi  $\lambda$ , tj. dostáváme parametrické rovnice přímky v Eukleidově prostoru. Zatímco v Eukleidově geometrii mohou být libovolné dva body spojeny úsekem přímky, na Riemannově varietě úlohu přímky přebírá geodetika. Příkladem geodetik na dvojdimenzionální varietě jsou oblouky hlavních kružnic na ploše kulové.

Dále vezměme v úvahu následující úlohu. Budiž dána hladká křivka  $C$  na Riemannově varietě  $M$ . Nechť  $C$  leží na jedné souřadnicové mapě variety  $M$  a je na ní popsána parametricky vyjádřenými rovnicemi  $x^j(\lambda)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Hledejme funkci  $x^j(\lambda)$  takovou, že

$$\ddot{x}^j = - \left\{ \begin{matrix} j \\ k \quad l \end{matrix} \right\} \dot{x}^k \dot{x}^l,$$

$$0 \leq \lambda \leq 1, j = 1, 2, \dots, n.$$

Předpokládejme, že  $x^j(0)$  a  $x^j(1)$  jsou známé funkce. Whitehead [16, 17] dokázal, že platí: Libovolný bod  $A \in M$  má okolí  $U$  takové, že pro libovolné dva body  $B_1, B_2 \in U$  se souřadnicemi  $x^j(0)$  a  $x^j(1)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , existuje jediná geodetika spojující  $B_1$  a  $B_2$  a celá ležící v  $U$ .

Důsledky tohoto teorému lze zformulovat do vět:

Věta 1. Jestliže je křivka  $x^j(\lambda)$  spojitá pro  $a \leq \lambda \leq b$  a vyhovuje rovnici geodetiky (12.1) pro  $a < \lambda < b$ , pak tato křivka vyhovuje této rovnici rovněž pro  $\lambda = a$  a  $\lambda = b$ ;

Věta 2. Jestliže řešení uvažované „dvojbodové úlohy“ v uvedeném Whiteheadově teorému zapíšeme ve tvaru  $x^j(\lambda, B_1, B_2)$ , poté pro libovolné  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$  funkce  $x^j(\lambda, B_1, B_2)$  spojitě závisí na souřadnicích  $x^j(0)$  a  $x^j(1)$  počátečního a koncového bodu  $B_1$  a  $B_2$ .

Pro Riemannovy variety lze dokázat, že pokud vyhovuje křivka  $x^j(\lambda)$  rovnici geodetiky pro  $a < \lambda < b$  a leží v kompaktní oblasti variety, existují limity  $x^j(\lambda)$  pro  $\lambda \rightarrow a$  a  $\lambda \rightarrow b$  a platí: Pokud je křivka  $x^j = x^j(\lambda)$  geodetikou pro  $a < \lambda < b$  a je spojitou křivkou pro  $a \leq \lambda \leq b$ , lze geodetiku prodloužit o jistou hodnotu  $\lambda > b$  a také o jistou hodnotu  $\lambda < a$ . Jestliže rozumíme geodetikou (na rozdíl od úseku geodetiky) řešení rovnice geodetiky, prodloužené nakolik je to možné přes několik map, můžeme říci, že pro Riemannovy variety (rovněž pro pseudoRiemannovy variety) nemůže mít geodetika na varietě svůj počátek, ani konec. To však neznamená, že pro geodetiku  $\lambda \rightarrow \pm\infty$  a že geodetika nemůže mít počátek či konec v nějakém prostoru, do něhož je vnořena daná varieta. Pro varietu  $M$  a prostor  $P$  to značí, že  $M \subset P$  a kterékoliv dva body z  $M$  mají v  $M$  touž vzdálenost jako v prostoru  $P$ .

Chceme podotknout, že existuje důležitá vazba mezi tzv.  $\omega$ -limitními množinami a klíčovými otázkami o reverzibilitě pohybu [16]. Nechť je dán na konečnědimenzionální varietě  $M$  dynamický systém  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , kde je  $\mathbf{f}$  hladké vektorové pole na  $M$ . Poté platí, že řešení  $\mathbf{x}(t)$  této rovnice, nazvané pohybem na  $M$ , nelze v obecném případě prodloužit pro všechna záporná  $t$ . Nemůžeme to provést ani v případě řešení Navierovy-Stokesovy rovnice s ohledem na její parabolický charakter. Avšak prodloužení řešení na množinu záporných hodnot  $t$  je možné v některých speciálních případech.

Než se o této možnosti zmíníme, je třeba zavést pojmy  $\omega$ -limitní bod a  $\omega$ -limitní množinu. Bod  $\xi \in M$  je  $\omega$ -limitním bodem pohybu  $\mathbf{x}(t)$ , jestliže platí  $|\mathbf{x}(t_n) - \xi| \rightarrow 0$  pro  $t_n \rightarrow \infty$ . Množinou všech  $\omega$ -limitních bodů pohybu je jeho  $\omega$ -limitní množinou  $\Omega_{\mathbf{x}(0)}$ , kde je  $\mathbf{x}(0)$  počáteční bod pohybu. Poznamenejme, že  $\Omega_{\mathbf{x}(0)}$  je uzavřenou množinou.

Předpokládejme, že k pohybu systému dochází z jeho  $\omega$ -limitního bodu. Poté můžeme takto se odvíjející pohyb prodloužit na množinu všech záporných hodnot  $t$  (tj. nekonečně daleko do minulosti) a stále náleží množině hodnot  $\Omega_{\mathbf{x}(0)}$  pro všechna  $t$ .

Z hlediska fyzikálních pozorování či numerického modelování se zdá takový závěr paradoxní. Ve skutečnosti tomu tak není. Uvědomme si, že každý numerický experiment se vyznačuje konečnou přesností. Třebaže podle definice  $\omega$ -limitní množiny  $\Omega_{\mathbf{x}(0)}$  fakticky libovolný ohraničený pohyb  $\mathbf{x}(t)$  po uplynutí konečného času „vstoupí“ do své vlastní  $\omega$ -limitní množiny, skutečný stav události je jiný. Neplatí, že při aplikaci konečně-diferenčních schémat se můžeme pohybovat po takové trajektorii libovolně dlouho v opačném směru, aniž bychom se přitom nevzdálili od  $\Omega_{\mathbf{x}(0)}$ . Toliko to značí, že pohyb systému v přímém směru pro dostatečně velká  $t$ , který není vystaven žádným podstatným změnám, lze chápat jako dostatečně přesnou aproximaci pohybu, který v ideálním smyslu náleží  $\Omega_{\mathbf{x}(0)}$  pro všechna  $t$ .

## 13 SOUVISLOSTI S NELINEÁRNÍMI SYSTÉMY MECHANIKY TEKUTIN

### 13.1 Adjungované rovnice systémů hydrodynamického typu

Technika konstrukce adjungovaných rovnic pro lineární a nelineární úlohy matematické fyziky doznala v posledních letech širokého uplatnění. Ihned z kraje je třeba říci, že existují velké rozdíly v získání těchto rovnic mezi lineárními a nelineárními problémy spojené s formulací adjungovaného operátoru v lineárním a nelineárním případě. Abychom vybrali z množiny adjungovaných rovnic takové rovnice, které jsou pro naše účely vskutku nezbytné, je třeba přesně formulovat výchozí úlohu vedoucí k těmto rovnicím [18].

Nejprve obrátíme pozornost na lineární nehomogenní rovnici

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{A}(t)\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0. \quad (13.1)$$

Předpokládáme, že  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  a  $\mathbf{A}$  je matice s reálnými koeficienty. S (13.1) adjungovanou rovnicí zapíšeme ve tvaru

$$-\frac{d\mathbf{u}^*}{dt} + \mathbf{A}^*(t)\mathbf{u}^* = \mathbf{f}^*.$$

Pro reálná  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{A}$  platí Lagrangeova identita

$$(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{A}^*\mathbf{v}) = (\mathbf{A}^*\mathbf{v}, \mathbf{u}),$$

kde  $(, )$  chápeme jako obyčejný skalární součin v  $\mathbb{R}^n$ . Lze ukázat, že platí

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)_t = (\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)_0 + \int_0^t [(\mathbf{f}, \mathbf{u}^*) - (\mathbf{f}^*, \mathbf{u})] dt. \quad (13.2)$$

Uvážíme-li nyní nelineární úlohu

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{B}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}, \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad (13.3)$$

adjungovanou rovnicí dostaneme, jestliže  $\mathbf{B}(\mathbf{u})$  vyjádříme ve tvaru

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}(\mathbf{u}) \mathbf{u}, \quad (13.4)$$

kde  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  je jistý nelineární operátor. V tomto případě požadovaná adjungovaná rovnice má tvar

$$-\frac{d\mathbf{u}^*}{dt} + \mathbf{A}^*(\mathbf{u}) \mathbf{u}^* = \mathbf{f}. \quad (13.5)$$

Přitom předpokládáme, že známe řešení úlohy (13.3), tj.  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  při známém  $\mathbf{u}$  můžeme považovat za lineární operátor, k němuž získáme operátor adjungovaný standardním způsobem. V našem konkrétním případě to bude matice transponovaná k  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ . Poté vztah (13.2) platí i pro nelineární úlohu (13.3). Je zřejmé, že reprezentace (13.4) je v obecném případě nejednoznačná a také nejednoznačná je adjungovaná rovnice (13.5).

Bud'tež  $\mathbf{f} = 0$ ,  $\mathbf{f}^* = 0$ . K tomu poznamenejme, že volba  $\mathbf{f}^*$  je libovolná, což vyústí na možnost řešit různé třídy úloh založených na poruchové teorii. Zápis (13.2) v tomto případě nabývá tvaru

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)_t = (\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)_0. \quad (13.6)$$

Na (13.6) lze nahlížet jako na soubor zákonů zachování úlohy (13.3) při  $\mathbf{f} = 0$ , pokud pro nelineární úlohy závisí  $\mathbf{u}^*$  na  $\mathbf{u}$ . Je třeba zde říci, že při  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{f}^* = 0$  vztahy (13.6) a (13.5), (13.3) nejsou ekvivalentní v tom smyslu, že z (13.3) a (13.5) vyplývá (13.6): jestliže platí (13.6) při libovolných datech pro  $\mathbf{u}^*$ , v obecném případě je tato rovnice rovnicí adjungovanou s výchozí, plus zbytek ortogonální k  $\mathbf{u}$ .

Například, je-li  $\mathbf{u}$  rovněž řešením adjungované rovnice, z (13.6) bezprostředně vyplývá zákon zachování energie pro výchozí rovnici. Získáme-li příslušným způsobem adjungovanou rovnici, můžeme dostat řadu zajímavých zákonů zachování.

V tomto dodatku zformulujeme tvrzení týkající se adjungovaných rovnic pro jednu třídu rovnic matematické fyziky a sice pro systémy hydrodynamického typu.

Pro jednoduchost obrátíme pozornost na tyto systémy s reálnými koeficienty, jejichž řešení jsou z reálných konečnědimenzionálních prostorů.

Uvažme následující systém nelineárních rovnic

$$\frac{du^i}{dt} = Q_i(\mathbf{u}), u^i|_{t=0} = u_0^i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13.7)$$

Systém (13.7) budeme nazývat systémem hydrodynamického typu tehdy, pokud je tento systém kvadraticky nelineární a existuje kvadratický zákon zachování

$$u^i u^i = \text{konst} \quad \text{a platí} \quad \frac{\partial Q_i}{\partial u^i} = 0.$$

Poznamenejme, že kvadratický zákon zachování může obecně mít dosti složitý tvar:

$$(\mathbf{S}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \text{konst},$$

kde je  $\mathbf{S}$  pozitivně definitní operátor. Přesto záměnou  $\mathbf{S}^{1/2}\mathbf{u} = \mathbf{v}$  lze vždy systém zapsat ve tvaru, kde pro zákon zachování docílíme výše uvedeného tvaru.

Nechť tedy máme kvadraticky nelineární systém rovnice s kvadratickým zákonem zachování

$$\frac{du^i}{dt} = \Gamma_{ijk} u^j u^k, \quad (13.8)$$

kde  $\Gamma_{ijk}$  splňuje podmínky symetrie  $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj}$ . Abychom se v systému (13.8) setkali se zákonem zachování,  $E = \text{konst}$ , je třeba, aby byly splněny podmínky cykličnosti

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji} + \Gamma_{jki} = 0. \quad (13.9)$$

Proveďme linearizaci (13.8) vzhledem k řešení  $\mathbf{u}$ . Označíme-li  $\delta\mathbf{u}$  odchylku od řešení, dostaneme rovnici

$$\frac{d\delta u^i}{dt} = \Gamma_{ijk} \delta u^j u^k + \Gamma_{ijk} u^j \delta u^k. \quad (13.10)$$

Poté platí, že systémy (13.8) až (13.10) připouštějí zákon zachování  $u^i \delta u^i = \text{konst}$ .

Proveďme důkaz tohoto tvrzení. Vynásobme (13.8)  $\delta u^i$  a poté rovnici (13.10) veličinou  $u^i$ . Po sečtení dostáváme

$$\frac{d}{dt} u^i \delta u^i = \Gamma_{ijk} u^j u^k \delta u^i + \Gamma_{ijk} \delta u^j u^k u^i + \Gamma_{ijk} u^j \delta u^k u^i.$$



Protože

$$\begin{aligned}\Gamma_{ijk}u^j u^i \delta u^k &= \Gamma_{jik}u^k u^i \delta u^j = \Gamma_{kij}u^j u^k \delta u^i, \\ \Gamma_{ijk}u^j u^i \delta u^k &= \Gamma_{ikj}u^k u^i \delta u^j = \Gamma_{jki}u^k u^j \delta u^i = \Gamma_{jki}u^j u^k \delta u^i,\end{aligned}$$

máme

$$\frac{d}{dt}u^i \delta u^i = (\Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji} + \Gamma_{jki})u^i u^k \delta u^i = 0$$

a tvrzení je dokázáno. V některých případech je systém (13.10) adjungovaný k (13.8).

Uveďme si, že v daném případě je zákon zachování  $u^i \delta u^i = \text{konst}$  splněn pro rozsáhlejší třídu rovnic, než pro systémy hydrodynamického typu. K důkazu nevyžadujeme, aby  $\partial Q_i / \partial u^i = 0$ .

Naším úkolem není studovat limitní přechod k nekonečnědimenzionálnímu případu. Přesto uvádíme, že v celé paletě úloh matematické fyziky lze výrok o tom, že skalární součin řešení výchozí nelineární úlohy s kvadratickou nelinearitou a kvadratickým zákonem zachování a rovněž řešení linealizované úlohy jsou invarianty, bezprostředně ověřit přímým výpočtem. Platí to například pro rovnici homogenní hydrodynamiky s periodickými okrajovými daty:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{u}(x) = \mathbf{u}(x + L).$$

Dostáváme

$$\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial x} + \delta \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0,$$

nebo

$$\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0, \quad \delta \mathbf{u}(x) = \delta \mathbf{u}(x + L).$$

Tato rovnice je adjungovaná s rovnicí výchozí. Jestliže nyní vynásobíme rovnici pro  $\mathbf{u}$  výrazem  $\delta \mathbf{u}$ , rovnici pro  $\delta \mathbf{u}$  funkcí  $\mathbf{u}$  a obě rovnice sečteme, dospíváme ke vztahu

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{u} \frac{\partial}{\partial x}(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0,$$

tedy

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial t}((\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}), \mathbf{u}) = 0.$$

Provedeme-li integraci podle  $x$  od 0 do  $L$  a přihlédneme-li k podmínkám periodicity, získáme

$$\int_0^L (\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) dx = (\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \text{konst.}$$

V druhém případě to bude jednodimenzionální Kortewegova de Vriesova rovnice s periodickými okrajovými podmínkami:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - 6\mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial x^3}.$$

Existence invariantu zde vyplývá z jeho existence pro rovnici jednodimenzionální hydrodynamiky, neboť Kortewegovu de Vriesovu rovnici dostaneme z rovnice jednodimenzionální hydrodynamiky časovou inverzí a přidáním lineárního antisymetrického operátoru.

Třetí příklad se týká rovnice dvojdimenzionální hydrodynamiky na ploše kulové:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi) = 0,$$

kde je  $\psi$  proudová funkce a  $J$  jakobián.

Na základě těchto rovnic lze zformulovat ještě celou třídu úloh, pro které platí dříve uvedená tvrzení.

Z existence invariantu  $(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \text{konst}$  lze vyvodit řadu užitečných závěrů. Prvý z nich se týká tvrzení o tom, že stabilní a nestabilní varieta řešení systémů hydrodynamického typu je ortogonální k řešení. Stabilní a nestabilní varietou rozumíme variety odpovídající pozitivním a negativním Ljapunovovým exponentům. Pokud je řešení linearizovaného systému v počátečním časovém okamžiku zadáno ortogonálním řešením výchozího systému, zůstává ortogonálním pro všechna  $t$ .

Další závěr se týká systémů hydrodynamického typu, které lze vždy převést na tvar

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u} = 0, \quad (13.11)$$

kde je  $\mathbf{K}(\mathbf{u})$  antisymetrický operátor:  $\mathbf{K}^*(\mathbf{u}) = -\mathbf{K}(\mathbf{u})$ . Takovou reprezentaci budeme nazývat antisymetrickou.

Nebudeme zde dokazovat platnost tohoto výroku v obecném případě a důkaz provedeme pro jednodušší systémy hydrodynamického typu a sice pro triplety. Ostatně (13.9) platí právě v případě tripletové vazby. Píšeme

$$\frac{du_1}{dt} = pu_2u_3, \quad \frac{du_2}{dt} = qu_1u_3, \quad \frac{du_3}{dt} = ru_1u_2, \quad p + q + r = 0. \quad (13.12)$$

Tehdy je reprezentace (13.11) jednoparametrická:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p\alpha u_3 & (1-\alpha)pu_2 \\ -p\alpha u_3 & 0 & (q+\alpha p)u_1 \\ -(1-\alpha)pu_2 & -(q+\alpha p)u_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}; \quad (13.13)$$

$\alpha$  je libovolné reálné číslo. Uvedená reprezentace je jediná.

Platí:

Nechť je systém hydrodynamického typu zapsán ve tvaru (13.12). Tehdy jeho řešení vyhovuje adjungované rovnici. Snadno se o tom přesvědčíme, uvážíme-li, že v tomto případě adjungovaná rovnice má tvar

$$-\frac{d\mathbf{u}^*}{dt} + \mathbf{K}^*(\mathbf{u})\mathbf{u}^* = 0,$$

neboli

$$-\frac{d\mathbf{u}^*}{dt} - \mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u}^* = 0$$

a je tedy zřejmé, že  $\mathbf{u}$  vyhovuje této rovnici.

Z existence antisymetrické reprezentace pro systémy hydrodynamického typu vyplývá platnost následného tvrzení. Pro systém hydrodynamického typu lze vždy nalézt adjungovanou rovnici, jejíž řešení je stabilní podle Ljapunovova.

Protože systém hydrodynamického typu připouští antisymetrickou reprezentaci, příslušná adjungovaná rovnice bude mít kvadratický zákon zachování

$$(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*)_t = (\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*)_0.$$

Jelikož je adjungovaná rovnice lineární, z existence kvadratického zákona zachování vyplývá stabilita jeho řešení podle Ljapunovova.

Jestliže tedy je řešení výchozího systému hydrodynamického typu nestabilní podle Ljapunovova, vždy lze říci, že existuje adjungovaná rovnice, jejíž řešení je stabilní. Tento výrok platí i pro nekonečnědimenzionální systémy. Můžeme se o tom přesvědčit v případě rovnice jednodimenzi-  
onální hydrodynamiky

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

jejíž antisymetrickou reprezentací bude rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial uu}{\partial x} \right) = 0,$$

k níž má adjungovaná úloha tvar

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} + \frac{1}{3} \left( u \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial uu^*}{\partial x} \right) = 0.$$

Přistupme dále k problému tripletu. Z antisymetrické reprezentace pro triplet dojdeme k závěru, že řešení úlohy (13.13) vyhovuje odpovídající adjungované rovnici a tedy z (13.6) dostáváme zákon zachování energie. Máme-li na mysli triplet, docházíme k závěru, že řešení úlohy (13.13) vyhovuje příslušné adjungované rovnici a podle (13.6) dospíváme k zákonu zachování energie. V případě tripletu však existuje ještě jeden zákon zachování ve tvaru

$$I \equiv (q-r)u_1^2 + (r-p)u_2^2 + (p-q)u_3^2 = \text{konst.} \quad (13.14)$$

Pro (13.12) lze získat adjungovanou rovnici, jejímž důsledkem bude právě kvadratický zákon zachování (13.14).

Nahlížíme-li na funkcionál  $I$  jako na skalární součin  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$ , je zřejmé, že nutnou podmínkou splnění (13.14) je, aby k (13.12) adjungovaná rovnice měla řešení  $\mathbf{u}^* = ((q-r)u_1, (r-p)u_2, (p-q)u_3)^T$ . Poznamenejme, že v daném případě rovněž dostáváme jednoparametrickou třídu reprezentací pro triplet, jmenovitě

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & pu_3 & 0 \\ \beta qu_3 & 0 & (1-\beta)qu_1 \\ 0 & ru_1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}, \quad (13.15)$$

kde  $\beta = -p(q-r)/q(r-p)$ . Tehdy adjungovaná rovnice má tvar

$$-\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta q u_3 & 0 \\ p u_3 & 0 & r u_1 \\ 0 & (1-\beta) q u_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{pmatrix}.$$

Postačující podmínkou existence invariantu  $(\mathbf{S}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \text{konst}$  je existence takové reprezentace výchozího systému hydrodynamického typu, řešení jejíž adjungované úlohy splňuje podmínku  $\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{u}$ . Bude-li  $\mathbf{S}$  nedegenerovaný symetrický operátor, tato podmínka přechází na vztah  $-\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{S} = \mathbf{A}$ , neboli  $\mathbf{S}\mathbf{A} + \mathbf{A}^*\mathbf{S} = 0$  a tento zápis je ekvivalentní  $\mathbf{S}\mathbf{A} = \mathbf{K}$ , kde je  $\mathbf{K}$  antisymetrický operátor.

V případě reprezentace (pro triplet) (13.15) a  $\mathbf{S} = \text{diag}(q-r, r-p, p-q)$ , takovým antisymetrickým operátorem bude

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & (q-r)pu_3 & 0 \\ -(q-r)pu_3 & 0 & r(p-q)u_1 \\ 0 & -r(p-q)u_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Závěrem poznamenejme, že technika adjungovaných rovnic nás přivádí nejenom k novým užitečným zákonům zachování pro nelineární rovnice, ale též ke konstruktivním formulacím celé třídy diagnostických úloh.

### 13.2 K problému uzavírání řetězce rovnic pro momenty trojdimenzionálního systému Navierových-Stokesových rovnic při velkých Reynoldsových číslech

Řešení tohoto problému pro malá Reynoldsova čísla bylo publikováno v [19]. Pro velká Reynoldsova čísla byla úloha řešena v [20].

Uvažme systém Navierových-Stokesových rovnic ve tvaru

$$\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (13.16)$$

s periodickými okrajovými podmínkami

$$\mathbf{u}(\dots, x^j + 2\pi, \dots, t) = \mathbf{u}(\dots, x^j, \dots, t) \quad (13.17)$$

a počáteční podmínkou

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \quad (13.18)$$

V těchto vztazích je  $t$  z intervalu  $\langle 0, T \rangle$ ,  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \Omega = \mathbb{R}^3/2\pi\mathbb{Z}^3$  ( $\mathbb{Z}$  je množina všech celých čísel) a  $\Omega$  je anuloid. Pro každé  $t$  je

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u^1, u^2, u^3) \in H^0 = \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in (L_2(\Omega))^3 : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{0} \right\},$$

$A\mathbf{u} = -P\Delta\mathbf{u}$ ,  $B(\mathbf{u}) = Pu^j(\partial\mathbf{u}/\partial x^j)$  (sčítáme podle  $j$ ), kde je  $\Delta$  Laplaceův operátor,  $P: (L_2(\Omega))^3 \rightarrow H^0$  ortoprojektor. Položme  $H^\alpha = H^0 \cap (W_2^\alpha(\Omega))^3$ ,  $\alpha \geq 0$ , kde je  $W_2^\alpha(\Omega)$  Sobolevův prostor, tj. množina všech funkcí  $\mathbf{v} \in L_2(\Omega)$ , jejichž všechny zobecněné derivace  $D^\beta$  v řádu  $\alpha$  existují a patří opět do  $L_2(\Omega: D^\beta \mathbf{v} \in L_2(\Omega))$  pro  $|\beta| \leq \alpha$ .

Budiž dále  $\mathfrak{B}(X)$   $\sigma$ -algebra borelovských množin Hilbertova prostoru. Nechť počáteční podmínka  $\mathbf{u}_0$  v (13.18) je zapsána pro náhodnou funkci s pravděpodobnostní mírou  $\mu_0(\omega)$ ;  $\omega \in \mathfrak{B}(H^\alpha)$  je její distribuční funkce a necht'  $\mathbf{f}$  na pravé straně rovnice (13.16) je deterministická funkce. Poté stacionárním řešením úlohy (13.16) až (13.18) nazvěme jednoparametrický soubor měr  $\mu(\omega, t) = \mu_0(S(t, \cdot, \mathbf{f})^{-1}\omega)$  pro všechna  $\omega \in \mathfrak{B}(H^\alpha)$ . Zde je  $S(t, \cdot, \mathbf{f})^{-1}\omega = \{\mathbf{u}_0 \in H^\alpha: S(t, \mathbf{u}_0, \mathbf{f}) \in \omega\}$  a  $S(t, \cdot, \cdot): H^\alpha \times L_2(0, T; H^{\alpha-1}) \rightarrow H^\alpha$  operátor, přiřazující dvojici  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{f})$  řešení  $\mathbf{u}(t)$  úlohy (13.16) až (13.18) v časovém okamžiku  $t$ .

Nechť  $M$  je libovolná množina,  $N$  systém podmnožiny  $M$ . Říkáme, že  $N$  je množinová  $\sigma$ -algebra v  $M$  právě tehdy, když má tyto tři vlastnosti:

1.  $M \in N$ ;
2. Je-li  $A \in N$ , pak také  $M \setminus A \in N$ ;
3. Je-li  $A_n \in N$  pro všechna  $n$  z nějaké nejvýše spočetné množiny  $I$ , pak také  $\bigcup_{n \in I} A_n \in N$ .

Je-li  $N$  množinová  $\sigma$ -algebra v  $M$ , pak dvojici  $(M, N)$  nazýváme měřitelným prostorem a prvky  $\sigma$ -algebry nazýváme měřitelnými množinami v  $M$ . Necht'  $V$  je jakýkoliv systém podmnožin množiny  $M$ . Pak existuje nejmenší množinová  $\sigma$ -algebra  $N^*$  v  $M$  taková, že  $V \subset N^*$ . Tato věta nám umožňuje popsat jednu důležitou třídu množinových  $\sigma$ -algeber na topologických prostorech, tzv. množinovou  $\sigma$ -algebru všech Borelových množin daného topologického prostoru  $(M, S)$ . Definujeme ji jako nejmenší množinovou  $\sigma$ -algebru  $N$  v  $M$  obsahující  $S$ , tj. obsahující všechny otevřené množiny v  $(M, S)$ . Můžeme se tedy na každý topologický prostor dívat jako na měřitelný prostor, jehož množinová  $\sigma$ -algebra je generovaná topologií, tj. systémem všech otevřených množin.

Nejprve uvažme případ, kdy v (13.16) je  $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$ . Moment  $k$ -tého řádu  $M_k(t)$  statistického řešení  $\mathbf{u}(t, \omega)$  je definován vztahem

$$\begin{aligned}
M_k(t) &= M_k(t, x_1, x_2, \dots, x_k) = \int \mathbf{u}(x_1) \otimes \mathbf{u}(x_2) \otimes \dots \otimes \mathbf{u}(x_k) \mu(t, d\mathbf{u}) \\
&= \int \otimes^k \mathbf{u}(x_1, x_2, \dots, x_k) \mu(t, d\mathbf{u}).
\end{aligned}$$

Analogicky definujeme momenty  $m_k = m_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$  počáteční míry  $\mu_0$ . Jestliže je míra  $\mu_0(\omega)$  soustředěna na  $H^\alpha$ ,  $\text{supp} \mu_0 \subset H^\alpha$  a existuje její  $k$ -tý moment  $m_k$ , pak  $m_k \in H^\alpha(k) \equiv H^\alpha \otimes H^\alpha \otimes \dots \otimes H^\alpha = \otimes^k H$  ( $k$ -krát).

Momenty  $M_k(t)$  statistického řešení úlohy (13.16) až (13.18) při  $\mathbf{f} \in \mathbf{0}$  vyhovují Friedmannovu-Kellerovu systému rovnic

$$\begin{aligned}
\partial_t M_k(t) + A_k M_k + B_k M_{k+1} &= 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\
M_k(t)|_{t=0} &= m_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{13.19}$$

kde jsou  $A_0, B_0$  nulové operátory a při  $k \geq 1$

$$A_k = \sum_{l=1}^k I(l-1) \otimes A \otimes I(k-l), \quad B_k = \sum_{l=1}^k I(l-1) \otimes \hat{B} \otimes I(k-l);$$

$I(l): H^\alpha(l) \rightarrow H^\alpha(l)$  je jednotkový operátor a  $\hat{B}: H^{\alpha+1}(2) \rightarrow H^\alpha$  pro  $\alpha > 1/2$  je lineární spojitý operátor takový, že  $B(\mathbf{u}) = \hat{B}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$ .

Problém uzavírání řetězce rovnic (13.19) lze formulovat takto: Je třeba nalézt posloupnosti úloh  $U_N$  takovou, že  $U_N$  obsahuje  $N+1$  neznámou funkci  $\{M_0^N, M_1^N, \dots, M_N^N\}$  a přitom řešení  $M^N$  úlohy  $U_N$ , zapsané ve tvaru  $\mathbf{M}^N = \{M_0^N, M_1^N, \dots, M_N^N, 0, \dots, 0, \dots\}$ , aproximuje řešení  $\mathbf{M} = \{M_0, M_1, \dots, M_k, \dots\}$  úlohy (13.19).

Zaveďme si prostory

$$\begin{aligned}
H_q^\alpha(0) &= R, H_q^\alpha(k) = [m_k : A_k^{q/2} m_k \in H^\alpha(k)] \text{ pro } k \geq 1, \\
Y^\alpha(k) &= [M_k(t) \in L_2(0, T; H_1^\alpha(k)); \partial_t M_k(t) \in L_2(0, T; H_{-1}^\alpha(k))], \quad k \geq 0, \\
H_q^\alpha, R &= \prod_{k=0}^{\infty} H_q^\alpha(k), \|m\|_{H_{q,R}^\alpha}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} R^{-2k} \|m_k\|_{H_q^\alpha(k)}^2; H_R^\alpha \equiv H_{0,R}^\alpha, \\
Y_R^\alpha &= \prod_{k=0}^{\infty} Y^\alpha(k), \|M_k\|_{Y_R^\alpha}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} R^{-2k} \|M_k\|_{Y^\alpha(k)}^2,
\end{aligned}$$

kde  $\mathbf{m} = \{m_0, m_1, \dots, m_k, \dots\}$ ,  $\mathbf{M} = \{M_0, M_1, \dots, M_k, \dots\}$ . V prostoru  $H_R^\alpha$  jsou obsaženy počáteční údaje úlohy v počtu všech složek vektoru  $\mathbf{m}$  a  $Y_R^\alpha$

je prostor řešení úlohy (13.19). Budeme psát  $Y_R^\alpha < t_1, t_2 >$  v případě, kdy časový interval  $< t_1, t_2 >$ , na němž jsou definována funkce z prostoru  $Y_R$  se neshoduje s  $< 0, T >$  nebo když je třeba zdůraznit, že definiční oblastí je právě uzavřený interval  $< t_1, t_2 >$ .

Vektor  $\mathbf{m} = \{1, m_1, m_2, \dots, m_k, \dots\} \in H_R^\alpha$  nazvěme pozitivně definitní, je-li dán momenty pravděpodobnostní míry  $\mu$ . Když  $\text{sup } \mu \subset B_R = \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\|_{H^\alpha} < R\}$  a  $\mathbf{m} = \{m_k\}$  jsou momenty míry  $\mu$ , pak  $\mathbf{m} \in H_R^\alpha$ . Jestliže je vektor  $\mathbf{m} = \{m_k\} \in H_R^\alpha$  pozitivně definitní a odpovídá mu míra  $\mu$ , pak  $\text{sup } \mu \subset \bar{B}_R$ . Tehdy je  $R$  charakteristická rychlost toku tekutiny s momenty  $\mathbf{m} \in H_R^\alpha$  a parametr  $R$  v  $H_R^\alpha, Y_R^\alpha$  lze považovat za Reynoldsovo číslo. Nadále nás bude zajímat případ proudění s velkým  $R$ .

Zaveďme si dále prostor

$$Q_N = \mathbf{M}^N(t) = \left[ \{M_0^N, M_1^N, \dots, M_k^N, \dots\} \in Y_R^\alpha < 0, T >; M_k^N \equiv 0 \right]$$

pro všechna  $k > N$  a  $\mathbf{M}^N$  splňuje (13.19). Vyslovme:

Teorém 1. Necht'  $\alpha > 2, R > 0$  a je dáno řešení  $\mathbf{M} \in Y_R^\alpha < 0, \infty >$  úlohy (13.19) s pozitivně definitní počáteční podmínkou  $\mathbf{m} = \{m_k\}$ . Tehdy existuje posloupnost  $\mathbf{M}^N \in Q_N$  taková, že

$$\left\| \mathbf{M} - \mathbf{M}^N \right\|_{Y_Q^\alpha < 0, T >} \rightarrow 0 \text{ při } N \rightarrow \infty, \text{ kde } \rho > R.$$

Teorém 2. Necht' jsou splněny podmínky teorému 1. Tehdy

$$\left\| \mathbf{M} - \mathbf{M}^N \right\|_{Y_{R_1}^\alpha < 0, T >} \rightarrow 0 \text{ při } N \rightarrow \infty,$$

kde  $R_1 > \rho > R$  a  $\rho$  je parametr z teorému 1.

Problém uzavírání řetězce rovnic (13.19) je tedy řešen za předpokladu, že řešení  $\mathbf{M}(t)$  úlohy (13.19) je z  $Y_R^\alpha < 0, \infty >$ . tj. existuje pro  $t \in < 0, \infty >$ . Je-li známo, že řešení  $\mathbf{M}(t)$  je z  $Y_R^\alpha < 0, T >$ , je tedy definováno pro  $t \in < 0, T >$ , pak problém uzavírání se podaří vyřešit v širší třídě než jen v  $Q_N$ . Tak je tomu v případě rovnic (13.16) s náhodnou pravou stranou  $\mathbf{f}$ . U tohoto případu se nyní zastavíme. Odtud získané výsledky dovolují řešit problém uzavírání nejenom úlohy (13.19), ale i rovnic pro momenty v obecnějších modelech turbulence.

Necht' v (13.16) je  $\mathbf{f}$  náhodná veličina. Poté funkcionální prostor definujeme zápisem

$$X^{\gamma, \alpha-1} = \left[ Y^\alpha(1), L_2(0, T; H^{\alpha-1}) \right]_{1-\gamma},$$



v němž je  $Y^\alpha(1)$  prostor  $Y^\alpha(k)$  pro  $k = 1$ ,  $\gamma \in \langle 0, 1 \rangle$ . Je-li vedle  $\mathbf{f}$  náhodnou funkcí rovněž  $\mathbf{u}_0$ , obrátíme pozornost na simultánní pravděpodobnostní rozdělení dané mírou

$$\nu_0(\omega, G), \omega \in \mathfrak{B}(H^\alpha), G \in \mathfrak{B}(X^{\gamma, \alpha-1}).$$

Tedy statistické řešení úlohy (13.16) až (13.18) udává vztah

$$\nu(t, \omega, G) = \int_G \nu_0(S(t, \cdot, \mathbf{f})^{-1} \omega, d\mathbf{f}),$$

kde  $S(t, \cdot, \mathbf{f})^{-1} \omega$  je definováno vztahem  $S(t, \cdot, \mathbf{f})^{-1} \omega = \{\mathbf{u}_0 \in H^\alpha: S(t, \mathbf{u}_0, \mathbf{f}) \in \omega\}$ . Necht'  $k \geq 0$ ,  $n \geq 0$  jsou celá čísla a  $(\mathbf{s}, \mathbf{y})^n = (s_1, y_1; s_2, y_2; \dots; s_n, y_n)$ . Momentem  $M_{k,n}$  řádu  $(k, n)$  statistického řešení  $\nu(t, \omega, G)$  nazýváme funkci

$$M_{k,n}(t) = M_{k,n}(t, \overline{\mathbf{x}^{(k)}}; \overline{(s, y)^{(n)}}) = \int (\otimes^k \mathbf{u})(\overline{x^{(k)}}) \otimes (\otimes^n \mathbf{f})(\overline{(s, y)^{(n)}}) \nu(t, d\mathbf{u}, d\mathbf{f}),$$

kde  $\overline{\mathbf{x}^{(k)}} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Analogicky definujeme momenty  $m_{k,n}(\overline{x^{(k)}}; \overline{(s, y)^{(n)}})$  míry  $\nu_0(\omega, G)$ ,  $\omega \in \mathfrak{B}(H^\alpha)$ ,  $G \in \mathfrak{B}(X^{\gamma, \alpha-1})$ , zadávající rozdělení pravděpodobnosti počátečních údajů úlohy (13.16) až (13.18). Lze dokázat, že momenty  $M_{k,n}(t)$  statistického řešení  $\nu(t, \omega, G)$  splňují Cauchyho úlohu

$$\begin{aligned} \partial_t M_{k,n}(t) + A_k M_{k,n} + B_k M_{k+1,n} + D_{k,n} M_{k-1,n+1} &= 0, \\ k \geq 0, \quad n \geq 0, & \quad (13.20) \\ M_{k,n}|_{t=0} &= m_{k,n}, \quad k \geq 0, n \geq 0, \end{aligned}$$

kde  $m_{k,n}$  jsou momenty míry  $\nu_0(\omega, G)$  a operátor  $D_{k,n}$  je dán vztahem

$$(D_{k,n} M_{k-1,n+1})(t, \overline{\mathbf{x}^{(k)}}; \overline{(s, y)^{(n)}}) = k^{-1} \sum_{l=1}^k M_{k-l,n+1}(t, \overline{\mathbf{x}^{(k)}}(l); t, x_l \overline{(s, y)^{(n)}});$$

$k \geq 1, n \geq 0$ ,  $\overline{\mathbf{x}^{(k)}}(l) = (x_1, x_2, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, x_n)$ . Předpokládejme, že v (13.20)

$$A_0 M_{0,n} = 0, \quad B_0 M_{1,n} = 0, \quad D_{0,n} M_{-1,n+1} = 0.$$

Poté, co jsme zavedli prostor  $X^{\gamma, \alpha-1} = [Y(1), L_2(0, T; H^{\alpha-1})]_{1-\gamma}$ , definujeme prostory

$$X^{\gamma, \alpha-1}(n) = \otimes^n X^{\gamma, \alpha-1}, \quad X_R^{\gamma, \alpha-1} = \prod_{n=0}^{\infty} X^{\gamma, \alpha-1}(n),$$

$$\| \mathbf{F} \|_{X_R^{\gamma, \alpha-1}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} R^{-2n} \| F_n \|_{X^{\gamma, \alpha-1}(n)}^2,$$

kde  $\mathbf{F} = \{F_0, F_1, \dots, F_n, \dots\}$ . Platí:

**Teorém 3.** Necht'  $\alpha > 2$ ,  $\gamma > 1/2$ ,  $R > 0$ . Tehdy řešení  $\mathbf{M}(t) = \{M_{k,n}(t)\}$  úlohy (13.20) je jediné v prostoru  $Y_R^\alpha \otimes X_R^{\gamma, \alpha-1}$ , kde  $Y_R^\alpha \otimes X_R^{\gamma, \alpha-1}$  jsou prostory dříve zavedené.

**Teorém 4.** Necht'  $\alpha > 2$ ,  $\gamma > 1/2$ ,  $R > 0$  a  $\mathbf{M}(t) = \{M_{k,n}\} \in Y_R \otimes X_R^{\gamma, \alpha-1}$  je řešení úlohy (13.20) s pozitivně definitní počáteční podmínkou  $\mathbf{m} = \{m_{k,n}\} \in H_R^\alpha \otimes X_R^{\gamma, \alpha-1}$ . Tehdy pro libovolné  $t \in \langle 0, T \rangle$  je vektor  $\mathbf{M}(t) = \{M_{k,n}(t)\}$  pozitivně definitní a jemu odpovídající míra  $\nu(t, d\mathbf{u}, d\mathbf{f})$  je statistickým řešením úlohy (13.16) až (13.18).

Nakonec si zavedme prostor

$$\theta_N = \left[ \mathbf{M}^N = \{M_{k,n}^N\} \in Y_R^\alpha \otimes X_R^{\gamma, \alpha-1} : M_{k,n}^N = 0 \right], k+n > N$$

a  $\mathbf{M}^N$  splňuje (13.20). Vyslovme:

**Teorém 5.** Necht'  $\alpha > 2$ ,  $\gamma > 1/2$ ,  $R > 0$  a  $\mathbf{M}(t) = \{M_{k,n}\} \in Y_R^\alpha \otimes X_R^{\gamma, \alpha-1}$  je řešení úlohy (13.20) s pozitivně definitní počáteční podmínkou  $\mathbf{m} = \{m_{k,n}\}$ . Tehdy existuje posloupnost  $\mathbf{M}^N \in \theta_N$  taková, že

$$\| \mathbf{M} - \mathbf{M}^N \|_{Y_\rho^\alpha \otimes X_\rho^{\gamma, \alpha-1}} \rightarrow 0 \text{ při } N \rightarrow \infty,$$

kde  $\rho > \rho_0(R)$  a  $\rho_0(R)$  je dostatečně velké číslo závisící na  $R$ .

Zastavme se u následující úlohy:

$$\| \mathbf{M}^N(0) - \mathbf{m}^N \|_{H_\rho^\alpha}^2 \rightarrow \inf_{\mathbf{M}^N \in \theta_N}, \quad \| \mathbf{M}^N \|_{L_2(0, T; H_{1, \rho}^\alpha) \otimes X_\rho^{\gamma, \alpha-1} \leq \xi^2}, \quad (13.21)$$

kde  $\rho > \rho_0(R)$ ,  $\xi^2 \geq \| \mathbf{M} \|_{L_2(0, T; H_{1, \rho}^\alpha) \otimes X_\rho^{\gamma, \alpha-1}}^2$ ,  $\mathbf{M}$  je řešení úlohy (13.20),  $\mathbf{m}^N = \{m_{k,n}^N\}$ , přičemž  $m_{k,n}^N = m_{k,n}$  pro  $k+n \leq N$  a  $m_{k,n}^N = 0$  pro  $k+n > N$ .

Tehdy má tato úloha jediné řešení  $\hat{\mathbf{M}}^N \in \theta_N$ . Uvedme:

**Teorém 6.** Necht' jsou splněny podmínky v teorému 5. Tehdy

$$\| \mathbf{M} - \hat{\mathbf{M}}^N \|_{Y_{R_1}^\alpha \otimes X_{R_1}^{\gamma, \alpha-1}} \rightarrow 0 \text{ pro } N \rightarrow \infty,$$

kde  $R_1 > \rho > \rho_0(R)$  a  $\mathbf{M}^N$  je řešení předchozí úlohy.

Všimněme si problému uzavírání úlohy (13.19), je-li řešení definováno  $\mathbf{M}(t) \in Y_R^\alpha < 0, T >$  na konečném časovém intervalu  $< 0, T >$ . Na základě řešení  $\mathbf{M} = \{M_k\} \in Y_R^\alpha$  sestrojme vektor  $\mathbf{L} = \{L_{k,n}\} : L_{k,0} = M_{k,0}$  pro  $k \geq 0$ ;  $L_{k,n} = 0$  pro  $k \geq 0, n \geq 1$ . Poté  $\mathbf{L} = \{L_{k,n}\} \in Y_R^\alpha \otimes X_R^{\gamma, \alpha-1}$  vyhovuje řetězci (13.20) a rovněž počátečním podmínkám  $L_{k,0}|_{t=0} = m_k, L_{k,n}|_{t=0} = 0$  pro  $k \geq 0, n \geq 1$ .

Vraťme se k úloze (13.21), v níž  $\mathbf{m}^N = \{m_{k,n}^N\}$  je definováno podmínkou  $m_{k,0}^N = m_k$  pro  $0 \leq k \leq N$  a  $m_{k,0}^N \equiv 0$  pro ostatní  $k, n$ . Necht'  $\mathbf{L}^N$  je řešení úlohy (13.21). Poté podle teorému 6

$$\|\mathbf{L} - \mathbf{L}^N\|_{Y_{R_1}^\alpha \otimes X_{R_1}^{\gamma, \alpha-1}} \rightarrow 0 \text{ pro } N \rightarrow \infty.$$

Odtud dostáváme, že  $\|\mathbf{M} - \mathbf{M}^N\|_{Y_{R_1}^\alpha} \rightarrow 0$  pro  $N \rightarrow \infty$ , kde  $\mathbf{M}^N = \{L_{0,0}^N, L_{1,0}^N, \dots, L_{N,0}^N, 0, \dots, 0, \dots\}$ .

### 13.3 Arnoldova konstrukce zobecněného tuhého tělesa

Pro pohodlí čtenáře, ale také s ohledem na další výklad o hydrodynamických invariantech, opětovně zde věnujeme pozornost zobecněnému tuhému tělesu a budeme sledovat jeho konstrukci podle Arnolda [21]. Získáme tak další poznatky, doplňující informace podané v kapitole 10.

Jak jsme již uvedli, zobecněným tuhým tělesem budeme rozumět dynamický systém s konfiguračním prostorem daným libovolnou Lieovou grupou  $G$ , opatřenou levoinvariantní Riemannovou metrikou, ztotožněnou s Lagrangeovou funkcí – kinetickou energií zobecněného tuhého tělesa. Je jí pozitivně definitní kvadratická funkce úhlové rychlosti v tělese (souřadnicový systém je pevně spojený s tělesem). Ve smyslu analogie s klasickou teorií otáčivého tuhého tělesa (Eulerova teorie) upevněného v bodě, s konfiguračním prostorem  $SO(3)$  (grupa vlastních rotací trojdimenzionálního Eukleidova prostoru), jsou úhlové rychlosti v tělese a v prostoru dány rovnostmi

$$\boldsymbol{\omega} = L_{g^{-1}*} \dot{g} \in \mathfrak{g}, \quad \boldsymbol{\Omega} = R_{g^{-1}*} \dot{g} \in \mathfrak{g},$$

kde je  $g(t)$  trajektorie (orbita) zobecněného tuhého tělesa na grupě  $G$ ,  $L_g$  a  $R_g$  jsou zobrazení tečných prostorů indukovaná levými a pravými translacemi  $L_g$  a  $R_g$ ,  $\mathfrak{g}$  je Lieova algebra grupy  $G$ , tj. tečný prostor v jednotce grupy. Platí

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{Ad}_g \boldsymbol{\omega}; \quad (13.22)$$

zobrazení  $\text{Ad}_g = (R_{g^{-1}}L_g)_{*c} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  je adjungovaná reprezentace grupy ( $\text{Ad}_{gh} = \text{Ad}_g \text{Ad}_h$ ).

Matrika zadaná na Lieově algebře  $\mathfrak{g}$  kvadratickou pozitivně definitní funkcí úhlové rychlosti v tělese

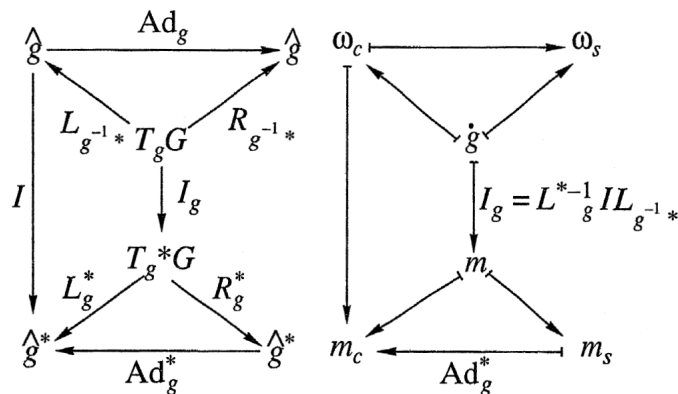
$$E = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{l}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \langle \dot{g}, \dot{g} \rangle_g \quad (13.23)$$

určuje levoinvariantní metriku na celé grupě  $G$  (úhlovou rychlost v tělese dostaneme z  $\dot{g}$  levou translací) a nezávisí na poloze tělesa v prostoru. V (13.23) je  $\mathbf{l}$  symetrický pozitivně definitní operátor, nazývaný operátorem (nebo tenzorem) setrvačnosti, zobrazující  $\mathfrak{g}$  v duální prostor (koalgebru)  $\mathfrak{g}^*$ ;  $(\mathbf{a}, \boldsymbol{\xi})$  je hodnota  $\mathbf{a} \in \mathfrak{g}^*$  na  $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{g}$  a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  udává skalární součin na Lieově algebře:  $\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta} \rangle = (\mathbf{l} \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta})$  pro libovolná  $\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{g}$ .

Prvek koalgebry  $\mathbf{m} = \mathbf{l}\boldsymbol{\omega}$  nazvěme momentem hybnosti v tělese (kinetickým momentem v tělese) a vztahem (13.22) indukované zobrazení koalgebry  $\mathfrak{g}^*$  do sebe zadává moment hybnosti v prostoru:

$$\mathbf{M} = \text{Ad}_{g^{-1}}^* \mathbf{m}.$$

K  $\text{Ad}_g$  duální operátor  $\text{Ad}_g^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$  nazýváme koadjungovanou reprezentací grupy ( $\text{Ad}_{gh}^* = \text{Ad}_h^* \text{Ad}_g^*$ ). Diagram zde uváděných zobrazení je na obr. 13.1, kde  $\hat{\mathfrak{g}}^*$  značí koalgebru.



Obr. 13.1 Komutativní graf lineárních operátorů [14].

Derivaci adjungované reprezentace v jednotce grupy ve směru vektoru  $\xi \in \mathfrak{g}$  (označme  $\text{ad}_\xi$ ) udává rovnost

$$\text{ad}_\xi = \left( \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp(t\xi)} \right)_{t=0},$$

kde je  $\exp(t\xi)$  jednoparametrická grupa s tečným vektorem  $\xi$ . Odtud dostáváme, že pro libovolná  $\xi$  a  $\eta \in \mathfrak{g}$  máme

$$\text{ad}_\xi \eta = [\xi, \eta].$$

V tomto zápisu značí  $[ , ]$  komutátor.

Derivace koadjungované reprezentace v jednotce grupy ve směru vektoru  $\xi$

$$\text{ad}_\xi^* = \left( \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp(t\xi)}^* \right)_{t=0} \quad (13.24)$$

je operátor sdružený s  $\text{ad}_\xi$ :

$$(\text{ad}_\xi^* \mathbf{a}, \eta) \equiv (\mathbf{a}, \text{ad}_\xi \eta)$$

pro libovolná  $\mathbf{a} \in \mathfrak{g}^*$  a  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ .

Označíme-li  $\text{ad}_\xi^* \mathbf{a} = \{\xi, \mathbf{a}\}$ , poslední rovnost výhodně zapíšeme ve tvaru

$$(\{\xi, \mathbf{a}\}, \eta) = (\mathbf{a}, [\xi, \eta]).$$

Podle principu nejmenší akce dochází k pohybu zobecněného tuhého tělesa po geodetice jeho konfiguračního prostoru – Lieově grupě se zadanou levoinvariantní metrikou. Jeho pohybová rovnice se odvodí stejně, jako pro obyčejný mechanický setrvačnick. Je důležitá následná invariantní vlastnost pohybu zobecněného tuhého tělesa spočívající v tom, že moment hybnosti v prostoru splňuje vztah

$$\mathbf{M} = 0. \quad (13.25)$$

Odsud nalezneme pohybovou rovnici v souřadnicovém systému pevně spjatým s tělesem. Jestliže derivujeme  $\mathbf{M} = \text{Ad}_{g^{-1}}^* \mathbf{m}$  podle  $t$  ve směru trajektorie zobecněného tuhého tělesa, s přihlédnutím k (13.25) dostáváme

$$0 = \left( \frac{d}{dt} \text{Ad}_{g^{-1}(t)}^* \mathbf{m} \right)_{t=0} = \left( \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp(-t\omega)}^* \right)_{t=0} \mathbf{m} + \left( \text{Ad}_{\exp(-t\omega)}^* \right)_{t=0} \dot{\mathbf{m}}.$$

Avšak podle (13.24) máme

$$\dot{\mathbf{m}} = -\text{ad}_{-\boldsymbol{\omega}}^* \mathbf{m} = \text{ad}_{\boldsymbol{\omega}}^* \mathbf{m} = \{\boldsymbol{\omega}, \mathbf{m}\}. \quad (13.26)$$

V termínech úhlové rychlosti v tělese zapisujeme pohybové rovnice takto:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = B(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}), \quad (13.27)$$

kde pro bilineární formu  $B(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$  platí

$$\langle B(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}), \boldsymbol{\zeta} \rangle = \langle [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}], \boldsymbol{\xi} \rangle$$

pro libovolná  $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathfrak{g}$ .

### 13.4 Kelvinův (Thomsonův) teorém a Moffatův hydrodynamický invariant

Se zřetelem na postup vyústící ke vztahu (13.23) je zřejmé, že veličina  $E$  je prvním integrálem pohybu Eulerovy rovnice (13.26) či (13.27). Dále moment hybnosti zaujímá v prostoru pevnou polohu a to znamená, že každá složka vektoru momentu hybnosti v koalgebře  $\mathfrak{g}^*$  Lieovy algebry  $\mathfrak{g}$  se zachovává. Odtud dostáváme, že existuje ještě  $N$  ( $N$  je dimenze prostoru  $\mathfrak{g}^*$ ) nezávislých prvých integrálů pohybu zobecněného tuhého tělesa. Máme-li nyní na mysli uplatnění zobecněného tuhého tělesa v popisu nekonečně-dimenzionálních dynamických systémů, pak tvrzení (13.25) Arnold formuloval v invariantní formě jako:

**Teorém 1.** Orbity koadjungované reprezentace grupy v prostoru duálním k algebře jsou invariantními varietami toku v tomto prostoru, tj. tokem příslušné diferenciální rovnice.

Při důkazu tohoto teorému je třeba si uvědomit, že  $\mathbf{m}(t)$  získáme z  $\mathbf{M}(t)$  působením koadjungované reprezentace a  $\mathbf{M}$  ( $\dot{\mathbf{M}} = 0$ ) zaujímá v prostoru pevnou pozici.

Než vyslovíme další teorém vyplývající ze zápisu  $\dot{\mathbf{M}} = 0$ , poznamenejme, že je-li prvek  $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{g}$  pevný v prostoru, tedy platí  $\dot{\boldsymbol{\xi}}_s = 0$ , v souřadnicovém systému pevně spojeným s tělesem bude

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_c = [\boldsymbol{\xi}_c, \boldsymbol{\omega}]. \quad (13.28)$$

O platnosti (13.28) se přesvědčíme tak, že přihlídneme ke vztahu  $\boldsymbol{\xi}_s = \text{Ad}_{g(t)} \boldsymbol{\xi}_c$ , spojujícím spolu prvky Lieovy algebry  $\boldsymbol{\xi}_s$  a  $\boldsymbol{\xi}_c$ . Odtud

$$\dot{\xi}_s = \left( \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\exp(t\omega)} \xi_c \right)_{t=0} = \text{ad}_\omega \xi_c + \dot{\xi}_c = 0.$$

Teorém 2. Pro libovolné v prostoru pevné  $\xi \in \mathfrak{g}$  je veličina

$$H_\xi = (\mathbf{m}, \xi_c) \quad (13.29)$$

prvým integrálem pohybu toku zadaného systémem (13.26), (13.28) na  $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}$ .

K důkazu tohoto teorému nám poslouží vztah  $(d/dt)(\mathbf{m}, \xi_c) = (\mathbf{m}, \dot{\xi}_c) + (\dot{\mathbf{m}}, \xi_c)$  a pak s ohledem na (13.26), (13.28) platí

$$(\{\omega, \mathbf{m}\}, \xi_c) + (\mathbf{m}, [\xi_c, \omega]) \doteq (\mathbf{m}, [\omega, \xi_c]) + (\mathbf{m}[\xi_c, \omega]) = 0.$$

Půjde-li v případě zobecněného tuhého tělesa o konečnědimenzionální konfigurační prostor, mezi teorémy 1 a 2 platí vztah ekvivalence, a proto vedou ke stejným důsledkům. To však neplatí pro nekonečnědimenzionální Lieovy grupy. Podrobně úvaze dva „krajní“ případy Lieových grup působících v trojdimenzionálním Eukleidově prostoru, a sice případ grupy vlastních rotací tohoto prostoru  $SO(3)$  a případ grupy difeomorfismů ohraničené oblasti  $D$  trojdimenzionálního Eukleidova prostoru, tj. grupy  $SDiffD$  zobrazení zachovávajících objemový element.

V prvním případě (jde o konfigurační prostor obyčejného setrvačnicku) můžeme Lieovu algebru a k ní duální prostor ztotožnit s fyzikálním prostorem, v němž se těleso pohybuje. (Ve skutečnosti dochází ke ztotožnění šesti prostorů různých dimenzí:  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^{3*}$ ,  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}^*$ ,  $TG_g$  a  $TG_g^*$ . V  $N$ -dimenzionálním případě mají tečné prostory dimenzi  $N(N-1)/2$ ). Pohybové rovnice (13.25), (13.26) zapisujeme ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= 0, \\ \dot{\mathbf{m}} &= [\mathbf{m}, \omega], \mathbf{m} = \mathbf{I}\omega, \end{aligned} \quad (13.30)$$

kde úhlové rychlosti a momenty hybnosti jsou obecně zadány antisymetrickými maticemi (pro  $N=3$  se ztotožňují s trojdimenzionálními axiálními vektory),  $\mathbf{I}$  je symetrická pozitivně definitní matice momentů setrvačnosti. Při ztotožnění prostorů přechází  $[\xi, \mathbf{a}]$  v komutátor  $[\mathbf{a}, \xi]$ , v uvažovaném případě ve vektorový součin.

Orbity koadjungované reprezentace mechanického setrvačnicku jsou kulové plochy

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = \text{konst} \quad (13.31)$$

a teorém 1 vyjadřuje zachování čtverce momentu hybnosti v (13.30). Totéž dostáváme z teorému 2; při ztotožnění prostorů  $(m, \xi) = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\xi}$  (tečkou zde vyznačujeme obyčejný skalární součin vektorů trojdimenzionálního Eukleidova prostoru) lze za  $\boldsymbol{\xi}$  vzít v prostoru pevný moment hybnosti. Úhrnem z teorému 2 vyplývá vztah  $H_m = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = \text{konst}$  a dosahujeme shody s (13.31).

Upřeme nyní pozornost na grupu  $SDiffD$  zobrazení zachovávajících plošný element  $\delta\mu(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in D$ . Lieova algebra  $\mathfrak{g}(D)$  této grupy je dána nedi-  
vergentními vektorovými poli v  $D$ , tečnými k okraji  $\partial D$  oblasti  $D$ . Skalární součin na  $\mathfrak{g}(D)$  je dán zápisem

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \int_D \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} \delta\mu(\mathbf{x}), \quad (13.32)$$

kde tečkou je vyznačen obyčejný lokální skalární součin vektorových polí.

Postavení úhlových rychlostí přebírá Eulerovo pole rychlosti  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  nestlačitelné tekutiny s konstantní hustotou, kterou pro jednoduchost kládeme rovnu jedné. Nyní platí  $\mathbf{m} = \text{rot } \mathbf{u}$  a operátorem setrvačnosti, „ztotožňujícím“ (s přesností až na potenciální vektorové pole  $\text{grad}\varphi(\mathbf{x}, t)$ ) Lieovu algebru s Lieovou koalgebrou grupy  $SDiffD$ , je operace rotace. Úhlovou rychlost, tedy Eulerovo pole rychlosti, získáme z vektoru  $\dot{\mathbf{g}}$  tečného ke grupě v jejím bodě  $g$  pravou translací, takže skalární součin (13.32) zadává na  $SDiffD$  pravoinvariantní metriku

$$E = \frac{1}{2}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}(\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \langle \text{rot}^{-1} \text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle.$$

Docházíme k závěru, že při pravoinvariantní metrice pohyblivý a pevný souřadnicový systém si vyměňují úlohy. Moment hybnosti – vektorové pole  $\text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , nabývá pevných hodnot vzhledem k tekutině a nikoliv v souřadnicovém systému spojeným s prostorem, tj. příslušné vektorové pole se pohybuje spolu s tekutinou. Poznamenejme, že přechod od popisu v prostoru k popisu v tělese odpovídá v hydrodynamice přechodu od Eulerovy metody (pohyb tekutiny vyšetřujeme z hlediska pole) k metodě Lagrangeově, která vyšetřuje pohyb tekutiny z hlediska individuální částice. Rovnice (13.26), nyní odpovídající popisu Eulerovou metodou, má tvar Helmholtzovy rovnice a Eulerova rovnice popisující pohyb dokonalé tekutiny nabývá při konstantní hustotě tekutiny formy Gromekovy-Lambovy:



$$\frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{u}}{\partial t} = \{\mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{u}\}, \quad (13.33)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = [\mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{u}] + \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (13.34)$$

kde  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} = (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b}$  je Poissonova závorka vektorových polí, pro uvažovanou Lieovu algebru mající úlohu komutátoru – obyčejného lokálního vektorového součinu vektorových polí, dále pak  $\varphi$  je kalibrační funkce, zabezpečující nedivergenci pravé strany (13.34) a pro tuto funkci máme  $p+1/2u^2$ , kde je  $p$  tlak.

Východiskem našich dalších úvah je nyní objem infinitezimálního elementu tekutiny ve tvaru

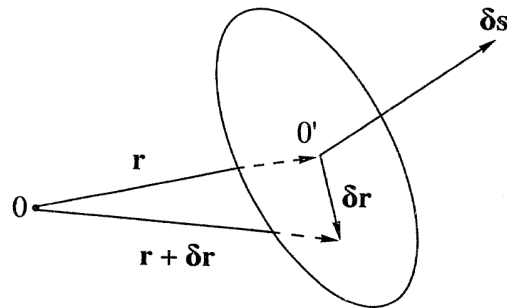
$$\delta\mu = \delta \mathbf{l} \cdot [\delta \mathbf{l}_1, \delta \mathbf{l}_2] = \delta \mathbf{l} \cdot \delta \mathbf{s}.$$

Veličiny  $\delta \mathbf{l}$ ,  $\delta \mathbf{l}_1$ ,  $\delta \mathbf{l}_2$  jsou přímky vytvářející objem,  $\delta \mathbf{s}$  je vektor s modulem rovným plošce orientovaného příčného řezu tekutým elementem s vytvářejícími přímkami  $\delta \mathbf{l}_1$ ,  $\delta \mathbf{l}_2$ , který je k těmto přímkám kolmý (obr. 13.2). Uvědomme si, že infinitezimální element délky proudnice, podávající obraz o poli rychlosti proudící tekutiny, vyhovuje Helmholtzově rovnici

$$\frac{\partial \delta \mathbf{l}}{\partial t} = \{\mathbf{u}, \delta \mathbf{l}\}, \quad (13.35)$$

kteřou lze přepsat do tvaru

$$\frac{d \delta \mathbf{l}}{dt} = (\delta \mathbf{l}, \nabla) \mathbf{u}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla). \quad (13.36)$$



Obr. 13.2 Orientovaný plošný element, pohybující se spolu s částicí tekutiny v bodě  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  [21].

Je tedy rychlost změny  $\delta I$  v (13.35) a (13.36) rovna rozdílu rychlostí tekutiny na jeho koncích. Konečně z požadavku zachování objemového elementu

$$\frac{d\delta\mu}{dt} = \frac{d(\delta I, \delta \mathbf{s})}{dt} = 0$$

docházíme k rovnici

$$\frac{d\delta \mathbf{s}}{dt} = -\delta \mathbf{s} \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta \mathbf{r}}. \quad (13.37)$$

O platnosti této rovnice se můžeme přesvědčit tak, že do (13.36) dosadíme (13.35) a poté přejdeme k tenzorovému označení. Popsaným postupem získáme rovnost

$$\delta l_i \left( \delta s_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{d\delta s_i}{dt} \right) = 0.$$

Nyní přihlédneme k tomu, že  $\delta I$  je libovolná veličina a proto je předchozí zápis ekvivalentní (13.37).

Poznamenejme, že jak  $\text{rot } \mathbf{u}$ , tak  $\delta I$  vyhovují Helmholtzově rovnici a skalární veličina

$$K = \text{rot } \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{s} = \oint_C \mathbf{u} \cdot \delta I; \quad \dot{K} = 0,$$

( $C$  okrajová křivka ohraničující element  $\delta \mathbf{s}$ ) je lagrangeovským invariantem pohybu.

V takových případech hovoříme o tom, že pole rychlosti proudící tekutiny zachovává hodnotu cirkulace rychlosti podél libovolné tekuté křivky. V termínech teorému 1 to značí, že obraz orbity koadjungované reprezentace v Lieově algebře Lieovy grupy  $SDiffD$  sestává z vektorových polí izovířivých s daným polem a je invariantní varietou toku Eulerovy hydrodynamické rovnice při konstantní hustotě. Můžeme tedy říci, že v hydrodynamice se teorém 1 vyslovuje ve tvaru Kelvinova cirkulačního teorému, který je přímým důsledkem stálé hodnoty momentu hybnosti  $\text{rot } \mathbf{u}$  vzhledem k tekutině a také zachování objemového elementu. Ještě dodejme, že při zachovávajícím se momentu hybnosti si lze vybavit další invariant

$$J_S = \text{rot } \mathbf{u} \cdot \text{grad } S,$$

kde je  $S = S(\mathbf{x}, t)$  pasivní skalár, například příměs neměnicí hustotu tekutiny, pro který platí  $\dot{S} = 0$ . V tomto případě  $\text{grad } S$  vyhovuje rovnici (13.37).

Obrátme nyní pozornost k teorému 2. V našem případě je třeba ve vztahu  $H_{\xi} = (\mathbf{m}, \xi_c)$  považovat  $\xi$  za element Lieovy algebry s pevnou hodnotou v souřadnicovém systému spojeným s tekutinou, jakým je např. pole  $\text{rot } \mathbf{u}$ , pokud toto pole je tečné k okraji  $\partial D$  oblasti  $D$ . Dojdeme tak ke známému integrálnímu Moffatovu invariantu v mechanice tekutin (helicity of the velocity field)

$$H_M = 2(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = 2 \langle \Gamma^{-1} \mathbf{M}, \mathbf{M} \rangle = 2 \langle \text{rot}^{-1} \text{rot } \mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{u} \rangle = \int_D \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{u} \delta \mu, \quad (13.38)$$

který s výhodou zapisujeme v termínech vektorového potenciálu:

$$H_M = \int_D \boldsymbol{\Omega} \cdot \text{rot}^{-1} \boldsymbol{\Omega} \delta \mu, \quad \boldsymbol{\Omega} \equiv \text{rot } \mathbf{u}.$$

Úhrnem můžeme říci, že v případě grupy  $S\text{Diff}D$  na rozdíl od konečně-dimenzionálních konfiguračních prostorů zobecněného tuhého tělesa, odpovídají teorémům 1 a 2 rozdílné integrální invarianty. Prvým je lagrangeovský invariant – cirkulace rychlosti podél libovolné tekuté křivky, druhým pak integrální Moffatův invariant  $H_M$ . Na těchto základech lze zformulovat další teorém:

**Teorém 3.** Budiž  $G_N$  konečnědimenzionální podgrupa grupy  $S\text{Diff}D$  s pravoinvariantní Riemannovou metrikou, indukovanou pravoinvariantní metrikou na  $S\text{Diff}D$ . Tehdy k pohybu homogenní dokonalé tekutiny se „spirálovitou“ strukturou podle rychlosti a popsaném rovnicemi zobecněného tuhého tělesa s konfiguračním prostorem – grupou  $G_N$ –, buď nedochází, či v opačném případě se proudění tekutiny v procesu pohybu nezachovává.

Při důkazu tohoto tvrzení vycházíme z faktu, že pro tuhého tělesa s konečně dimenzionálním konfiguračním prostorem po jeho odmítnutí, nejsou teorémy 1 a 2 ekvivalentní. Teorém 3 není v rozporu s Moffatovým teorémem, neboť od nuly různá veličina  $H_M$  se nemůže zachovávat, pokud pole vířivosti tekutiny není tečné k hranici  $\partial D$  oblasti  $D$ .

Přístupme k ilustraci těchto závěrů na příkladě známé interpretace Eulerových rovnic pohybu obyčejného tuhého tělesa upevněného v bodě, k níž je vhodné se uchýlit, abychom pochopili hydrodynamický smysl invariantu  $m^2$  pro rovnici (13.30). Grupa  $SO(3)$  je izomorfní grupě afinních zobrazení, převádějících do sebe plochu elipsoidu s různými osami. Tato grupa je částí  $S\text{Diff}D$ , kde trojdimenzionální oblast  $D$  je ohraničena plochou elipsoidu s hlavními poloosami  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ :

$$S = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1.$$

Grupě afinních zobrazení  $S \rightarrow S$  odpovídají partikulární řešení Eulerovy rovnice pro pohyb dokonalé tekutiny o konstantní hustotě uvnitř elipsoidu ve třídě lineárních polí rychlosti

$$\mathbf{W}_1 = -\frac{a_2}{a_3} x_3 \mathbf{j} + \frac{a_3}{a_2} x_2 \mathbf{k},$$

$$\mathbf{W}_2 = -\frac{a_3}{a_1} x_1 \mathbf{k} + \frac{a_1}{a_3} x_3 \mathbf{i},$$

$$\mathbf{W}_3 = -\frac{a_1}{a_2} x_2 \mathbf{i} + \frac{a_2}{a_1} x_1 \mathbf{j}.$$

Tato pole vyhovují podmínce ortogonalitě  $\int_D \mathbf{W}_i \cdot \mathbf{W}_j \delta\mu = 0$ ,  $i \neq j$  a splňující požadavek  $(\mathbf{W}_i, \nabla)S = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Pole rychlosti proudění zapisujeme ve tvaru rozvoje

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^3 \omega_k(t) \mathbf{W}_k(\mathbf{x}), \quad (13.39)$$

v němž na čase závislé veličiny  $\omega_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , nazýváme Poincarého parametry. S operací  $\boldsymbol{\Omega} \equiv \text{rot } \mathbf{u}$  jsou spojeny vztahy

$$\omega_k = \frac{a_1 a_2 a_3}{a_k I_k} \Omega_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (13.40)$$

Zde jsou  $I_k = \sum_{s=1}^3 a_s^2 - a_k^2$ ,  $k = 1, 2, 3$ , prvky diagonální matice  $\mathbf{I}$ .

Jestliže nyní dosadíme (13.39), (13.40) do Helmholtzovy rovnice (13.33) a provedeme integraci podle prostorových proměnných, s přihlédnutím k ortogonalitě polí  $\mathbf{W}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , dospějeme k závěru, že Poincarého parametry vyhovují rovnicím

$$\dot{\mathbf{m}} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{m}], \quad \mathbf{m} = \mathbf{l}\boldsymbol{\omega}. \quad (13.41)$$

Vztahy (13.41) se až na záměnu  $\boldsymbol{\omega} \rightarrow -\boldsymbol{\omega}$  shodují s Eulerovými rovnicemi pohybu tuhého tělesa upevněného v nepohybujícím se bodě. Nutnost takové záměny je spojena s tím, že kinetické energie tělesa (respektive tekutiny)

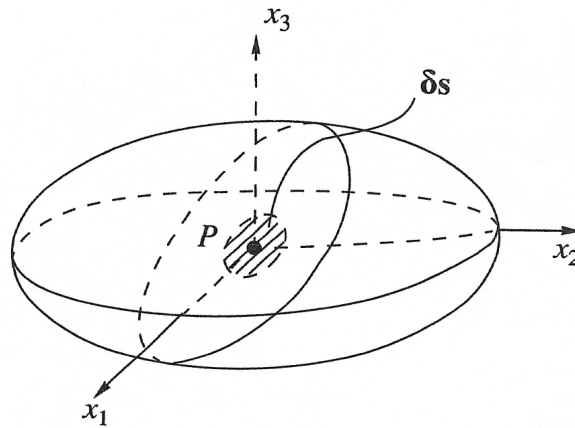
jsou v jejich konfiguračních prostorech dány levo (pravoinvariantními) metrikami.

Hledejme protějšky hydrodynamických invariantů  $E = \frac{1}{2} \int_D u^2 \delta\mu$ ,  
 $K = \oint_C \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{l}$  a  $H_M = \int_D \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{u} \delta\mu$  v třídě uvažovaných řešení. K dosažení tohoto záměru dosadíme (13.39), (13.40) do výrazu pro energii. Výsledkem této operace je zápis

$$E = \frac{1}{2} \mu E_m, \quad \mu = \frac{1}{2} a_1 a_2 a_3, \quad E_m = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m},$$

kde je  $\mu$  hmotnost veškeré tekutiny o jednotkové hustotě v dutině elipsoidu a  $E_m$  vyjadřuje kinetickou energii mechanického setrvačníku. Abychom spočetli levou stranu rovnosti

$$\dot{K} \equiv \frac{d \text{rot } \mathbf{u}}{dt} \delta \mathbf{s} + \text{rot } \mathbf{u} \frac{d \delta \mathbf{s}}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \quad (13.42)$$



Obr. 13.3 Plošný element  $\delta \mathbf{s}$  procházející počátkem souřadnicového systému, který je těžištěm elipsoidu [21].

s ohledem na uvažované proudění tekutiny zvolíme za  $\delta \mathbf{s}$  element plošky  $P$ , procházející středem souřadnicového systému (obr.13.3), kterým je střed elipsoidu. Protože při pohybu tekutiny dochází k zachování vířivosti, ponechávající pevnou polohu tekuté částice v počátku souřadnicového systému, vymezený element jako povrch tekutiny se bude deformovat a otáčet v prostoru, aniž přitom dojde k změně polohy jeho středu. To však znamená, že  $\delta \mathbf{s} = \delta \mathbf{s}(t)$  bude jen funkcí času a nikoliv funkcí prostorových souřadnic.

S přihlédnutím k tomuto faktu výsledkem dosazení (13.39) a (13.40) do (13.27) a (13.42) je vztah

$$\dot{\mathbf{l}} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{l}], \quad l_i = \frac{a_i}{a_1 a_2 a_3} \delta s_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (13.43)$$

rozšířený o zápis

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{m}, \mathbf{l}) = 0. \quad (13.44)$$

Můžeme tedy říci, že při proudění z třídy uvažovaných polí se element  $\delta \mathbf{s}$  vůči tekutině pevný se vyvíjí v prostoru podle Poissonovy rovnice (13.43) a pro Kelvinův invariant dostáváme

$$K_m = \mathbf{m} \cdot \mathbf{l}.$$

Uvážíme-li dále, že  $\mathbf{m}$  se rovněž nepohybuje vzhledem k tekutině a formálně lze rovnici (13.41) ztotožnit s rovnicí (13.43), záměnou  $\mathbf{l}$  za  $\mathbf{m}$  v (13.44) dospějeme k závěru, že invariant  $m^2$  pro hydrodynamický setrvačnick je přímým důsledkem Kelvinova teorému, tedy úhrnem teorému 1 pro zobecněné tuhé těleso. Tehdy

$$m^2 = \pi^{-2}(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3),$$

kde  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , je cirkulace rychlosti na okraji  $i$ -tého hlavního řezu elipsoidu.

Pojednání o Kelvinově teorému a Moffatově hydrodynamickém invariantu zakončíme studií o potenciálovém víru [22].

Výklad zahájíme připomenutím Eulerových-Poissonových rovnic, popisujících pohyb zobecněného těžkého setrvačnicku v souřadnicovém systému pevně spojeným s tělesem:

$$\dot{\mathbf{m}} = [\mathbf{m}, \boldsymbol{\omega}] + \mu g [\mathbf{l}_0, \boldsymbol{\gamma}], \quad (13.45)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = [\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}], \quad (13.46)$$

kde je  $[\ , \ ]$  vektorový součin,  $g$  gravitační zrychlení,  $\mu$  hmotnost setrvačnicku,  $\mathbf{l}_0$  polohový vektor jeho těžiště a  $\boldsymbol{\gamma} = \text{grad } \varphi / |\text{grad } \varphi|$  značí jednotkový vektor ve směru síly tíže s potenciálem  $\varphi$ . Existence prvních integrálů pohybu systému (13.45), (13.46)

$$E = \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} + g \mathbf{l}_0 \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{II}_m = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\gamma}^2 = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} \quad (13.47)$$

vyjadřuje zachování celkové energie tuhého setrvačnicku, projekce jeho momentu hybnosti do směru pole a zachování délky vektoru  $\boldsymbol{\gamma}$  v pevném souřadnicovém systému. Invariance nejvíce nás zajímající veličiny  $\mathbf{II}_m$  je spojena s teorémem Noetherové, podle něhož přítomnost tohoto prvního integrálu pohybu je důsledkem invariance potenciální energie těžkého setrvačnicku rotujícího kolem směru působení gravitačního pole.

Zatímco je konstrukce zobecněného těžkého setrvačnicku při platnosti jmenovaných mechanických invariantů založena na jeho konfiguračním prostoru  $SO(3)$ , orientací na konfigurační prostor  $SDiffD$  vzniká potřeba formulovat příslušné invarianty pro  $SDiffD$ , tj. pro grupu difeomorfismů ohraničené oblasti  $D$  trojdimenzionálního Eukleidova prostoru, zachovávajících objemový element.

Úhlová rychlost tohoto zobecněného tuhého setrvačnicku představuje nedivergentní Eulerovo pole rychlosti proudění nestlačitelné stratifikované tekutiny popsané rovnicí

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = [\mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{u}] - \text{grad}(p + \frac{1}{2} u^2) + \rho \mathbf{g}. \quad (13.48)$$

Zde je  $\mathbf{g}$  vektor gravitačního zrychlení a  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  odchylka hustoty stratifikovaného prostředí od její konstantní střední hodnoty, podle domluvy rovné jedné. Pro nestlačitelné prostředí je  $\rho$  lagrangeovský invariant, tj.

$$\frac{d\rho}{dt} \doteq \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \rho = 0.$$

V termínech momentu hybnosti  $\mathbf{M} = \text{rot } \mathbf{u}$  zapisujeme rovnici (13.48) ve tvaru

$$\frac{\partial \text{rot } \mathbf{u}}{\partial t} = \{\mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{u}\} + [\mathbf{g}, \text{grad } \rho], \quad (13.49)$$

který je spojován se jménem Friedmannovým. Přejít od (13.49) k (13.48) lze provést pomocí bilineární formy  $B = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ , dané vztahem  $\langle B(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}), \boldsymbol{\zeta} \rangle = \langle [\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}] \boldsymbol{\xi} \rangle$  pro libovolná  $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{g}$ .

Ze způsobu konstrukce zobecněného tuhého setrvačnicku s lagrangianem určeným rozdílem kinetické a potenciální energie je zřejmé, že prvému

invariantu (13.47) odpovídá v hydrodynamice celková energie tekutiny, v našem případě

$$E = \frac{1}{2} \int_D u^2 \delta\mu + \int_D g\rho(\mathbf{x},t)z\delta\mu, \quad (13.50)$$

kde je  $z$  vertikální souřadnice.

Z pozice teorému Noetherové (viz oddíl 13.7) nyní posuďme otázku o tom, existuje-li hydrodynamická analogie invariantu  $\Pi_m$  a jaký je jeho hydrodynamický smysl. Především, že vektor  $\boldsymbol{\gamma}$  ve vztahu (13.47) můžeme považovat za normálu k ekvipotenciální ploše těžkého setrvačníku. Není těžké si představit, že úlohu ekvipotenciálních ploch ve stratifikované nestlačitelné tekutině hrají plochy konstantní hustoty, protože celková potenciální energie tekutiny se zachovává při libovolných zobrazích z  $SDiffD$ , neměnicích funkci  $\rho(\mathbf{x},t)$ . Uvědomme si, že infinitezimální tekutá křivka  $C_0$  celá ležící v počátečním časovém okamžiku na takové ekvipotenciální ploše na této ploše nadále zůstává spolu s orientovaným elementem  $\delta\mathbf{s}_0$ , ohraničeným touto křivkou. Všimněme si, že  $\delta\mathbf{s}_0$  zaujímá pevnou polohu vůči tekutině, platí (13.37) a k evoluci  $\text{rot } \mathbf{u}$  dochází podle (13.49). Odtud seznáme, že veličina

$$K_0 = \text{rot } \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{s}_0 = \oint_{C_0} \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{l}, \quad \dot{K}_0 = 0 \quad (13.51)$$

je lagrangeovským invariantem pohybu; protože jsou vektory  $\delta\mathbf{s}_0$  a  $\text{grad } \rho$  kolinéární, druhý sčítanec na pravé straně (13.49) nemá vliv na chování  $K_0$ .

Na základě posledních výroků můžeme říci, že první integrál pohybu, který podle teorému Noetherové existuje v důsledku vzpomínané symetrie, je zvláštním případem Kelvinova invariantu – cirkulace rychlosti podél uzavřené tekuté křivky, úplně ležící na ploše konstantní hustoty. Tím jsme došli k invarianci potenciálového víru

$$\Pi_h = \text{rot } \mathbf{u} \cdot \text{grad } \rho, \quad (13.52)$$

který lze považovat za hydrodynamickou analogii mechanického invariantu  $\Pi_m$  (viz (13.47)).

Abychom se přesvědčili o správnosti tohoto tvrzení, představme si vírovou trubici protínající plochu konstantní hustoty  $\rho = \rho_0$ . (Vírová trubice je útvar analogický k proudové trubici v poli rychlosti). Průřezem trubice je uzavřená kontura  $C_0$ , celá ležící na ploše konstantní hustoty. Dvě blízko



sobě ležící plochy konstantní hustoty  $\rho_0$  a  $\rho_0 + \delta\rho$  vymezují válcový element trubice o objemu

$$\delta\mu = |\delta\mathbf{s}_0| \delta h, \quad (13.53)$$

kde je  $\delta h$  výška válce. Pro  $\delta\rho$  můžeme psát

$$\delta\rho = \text{grad } \rho \cdot \mathbf{n} \delta h. \quad (13.54)$$

V (13.54) je  $\mathbf{n}$  jednotkový vektor normály k ploše konstantní hustoty, ležící ve směru  $\text{grad } \rho$ . Porovnáním rovnic (13.53) a (13.54) dostáváme

$$\delta\mathbf{s}_0 = \frac{\delta\mu}{\delta h} \mathbf{n} = \frac{\delta\mu}{\delta\rho} \text{grad } \rho. \quad (13.55)$$

Když nyní dosadíme (13.55) do (13.51), je zřejmé, že invariance  $K_0$  implikuje invarianci potenciálového víru (13.52), neboť pro nestlačitelné prostředí se  $\delta\mu$  při pohybu tekutiny zachovává.

Na tomto místě je vhodné poznamenat: k analogii mezi popsányými mechanickými a hydrodynamickými invarianty se téměř bezprostředně dopracujeme, jestliže ve výrazu pro  $\Pi_m$  (viz (13.47)) zaměníme  $\boldsymbol{\gamma}$  vektorem  $\text{grad } \varphi$  a pravou stranu (13.52) vynásobíme veličinou  $g$ . Tehdy oba invarianty jsou dány skalárním součinem momentu hybnosti a gradientu potenciálu vnějšího pole, neboť ve stratifikované tekutině je zrychlení volného pádu výslednicí gravitačního a archimedovského zrychlení.

Také není bez zajímavosti okolnost, že popsanou analogii lze v jistém smyslu rozšířit na rovnice dynamiky plynů. Podobně jako je ideální nehomogenní nestlačitelná tekutina stratifikována na plochy konstantní hustoty, dokonalá stlačitelná kapalina je stratifikována na navzájem se neprotínající plochy stejné entropie a tekutá částice nacházející se v počátečním časovém okamžiku na libovolné ploše, stále na ní zůstává, neboť specifická entropie je lagrangeovským invariantem pohybu. Více o tom v [21].

Dříve než naznačíme cestu možného uplatnění výsledků naší činnosti týkající se invariance jistých objektů, podotkněme, že rovnice zobecněného těžkého setrvačnicku s konfiguračním prostorem  $P(3)$  (daným grupou afinních zobrazení plochy rovnoosého elipsoidu do sebe) a pravoinvariantní metrikou, velmi dobře popisují pohyb stratifikované tekutiny v dutině elipsoidu ve třídě lineárních polí rychlosti a hustoty, a až na záměnu  $\boldsymbol{\omega} \rightarrow -\boldsymbol{\omega}$  se shodují s Eulerovými-Poissonovými rovnicemi (13.45), (13.46). V tomto případě složky vektoru jsou rozdíly hustoty na hlavních poloosách elipsoidu,  $\mathbf{l}_0$  je konstantní vektor závislejší na orientaci elipsoidu v prostoru

vzhledem k síle tíže,  $\mu = 1/\rho_0$  ( $\rho_0$  je střední hustota tekutiny) a invariant  $\mathbf{H}_m = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\gamma}$  odpovídá potenciálovému víru (13.52) v uvažované třídě řešení.

Přestože nelze očekávat okamžitý praktický význam zde uvedených závěrů, pod zorným úhlem obecné hydrodynamiky není obtížné si představit, s jakými vlastními fyzikálními objekty máme co činit, pokud je na místě jejich invariance. Získané závěry o fundamentálních hydrodynamických invariantech bezesporu mohou být pro nás užitečné při získávání jednodušších hydrodynamických modelů, zachovávajících základní vlastnosti symetrie výchozích pohybových rovnic. Je na místě otázka, co je podstatné pro vznik a vývoj takových objektů, jakými jsou např. tornáda a tropické cyklóny a nemá-li zde určující úlohu právě „spirálový“ pohyb s integrálním Moffatovým invariantem. S ohledem na složitost takových útvarů a potíže při jejich popisu, přitahuje naši pozornost přechod ke konečnědimenzionálním modelům hydrodynamických Eulerových rovnic pro nestacionární proudění dokonalé tekutiny s různou nenulovou „spirálovitostí“. Podle teorém 3 neexistuje nestacionární řešení pohybových rovnic dokonalé homogenní nestlačitelné tekutiny pro konečnědimenzionální dynamický systém ze třídy zobecněných tuhých těles s nenulovým invariantem  $H_M$  (viz  $H_M = \int_D \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{u} \delta\mu$ ). V geofyzikální hydrodynamice pro analýzu

a interpretaci uvedených závěrů považujeme souřadnicové plochy za plochy konstantní entropie a potenciálového víru. Pohyb dokonalé nehomogenní tekutiny se děje na těchto plochách, neboť se zde setkáváme s lagrangeovskou invariancí entropie a potenciálového víru. Informace o původu potenciálového víru mohou přispívat k pochopení úlohy nediabatických faktorů porušujících invarianci potenciálové vířivosti [21].

### 13.5 Zobecněné tuhé těleso a dynamika globálních barotropních a baroklinních toků v geofyzikální hydrodynamice

Získávání poznatků o chování těžkého setrvačnicku v poli Coriolisových sil a jejich využívání v geofyzikální hydrodynamice si zaslouží pozornost zejména ze dvou důvodů [22]. Oba reflektují fakt, že Eulerovy rovnice setrvačnicku a Eulerovy-Poissonovy rovnice těžkého setrvačnicku, na straně jedné a Eulerovy pohybové rovnice nestlačitelné tekutiny a pohybové rovnice

slabě stratifikované tekutiny v Boussinesqově aproximaci na straně druhé, jsou různými modifikacemi rovnice zobecněného tuhého tělesa. Jsou to geodetiky libovolné Riemannovy metriky na libovolné Lieově grupě, po nichž dochází k pohybu zobecněného tuhého tělesa v konfiguračním (fázovém) prostoru daným touto grupou. Jeho kinetická energie je pozitivně definitní kvadratická forma na Lieově algebře Lieovy grupy. V mechanice je to grupa vlastních rotací  $SO(3)$  trojdimenzionálního Eukleidova prostoru, v hydrodynamice grupa difeomorfismů  $S\text{Diff}D$  ohraničené oblasti  $D$  Eukleidova prostoru, zachovávajících element objemu. Grupa  $SO(3)$  je izomorfní grupě  $P(3)$ , tj. grupě afinních zobrazení elipsoidu s různými osami do sebe a tato grupa je podgrupou  $S\text{Diff}D$ . Proto řešení rovnic zobecněného tuhého tělesa na grupě  $S\text{Diff}D$  s „hydrodynamickou metrikou“ je ze třídy přesných partikulárních řešení rovnic hydrodynamiky.

Další výklad započneme pohybovými rovnicemi tuhého tělesa s pevným bodem v poli Coriolisových sil a jejich následnou hydrodynamickou interpretací. Otáčí-li se tuhé těleso kolem pevného bodu, zvolíme jej za počátek souřadnicové soustavy  $Ox_1x_2x_3$  v prostoru pevné a zároveň za počátek souřadnicové soustavy  $Ox_1x_2x_3$  v tělese pevné. Jestliže je výsledný moment silové dvojice  $\mathbf{N} = \mathbf{O}$ , plyne z rovnice  $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{N}$ , že moment hybnosti  $\mathbf{M}$  je vektor velikosti i směru v prostoru konstantní. Pro pozorovatele v soustavě  $Ox_1x_2x_3$  je to vektor stálé délky a stálého směru. Pro pozorovatele v soustavě  $Ox_1x_2x_3$  je to vektor stálé délky, jehož směr se spojitě mění. Naším úkolem je uvést, jak se mění.

Poznámka 14: z pohledu teorie grup se mechanické a hydrodynamické systémy od sebe liší tím, že jejich kinetická energie zadávající metriku na jejich konfiguračních prostorech je levo a pravoinvariantní. To znamená, že při hydrodynamické interpretaci řešení rovnic v mechanice a naopak, jim odpovídající souřadnicové soustavy  $Ox_1x_2x_3$  a  $Ox_1x_2x_3$  si vymění úlohy. Například Lagrangeově popisu tekutiny odpovídá v mechanice popis v souřadnicovém systému pevným v prostoru a při Eulerovu popisu volíme souřadnicový systém v tělese pevný. Máme-li tedy na zřeteli použití rovnic mechaniky pro Eulerův popis pohybu tekutiny v poli Coriolisových sil, zajímá nás pohyb tuhého tělesa kolem pevného bodu v systému, který se otáčí konstantní úhlovou rychlostí  $\boldsymbol{\Omega}_0$  v soustavě v tělese pevné.

Než přikročíme k vlastnímu tématu, vezměme na vědomí tuto poznámku ke zvolené terminologii: Půjde-li o výchozí (vzorové) pohybové rovnice, mluvíme o původních rovnicích. O jejich kvazigeostrofické aproximaci píšeme jako o „kvazigeostrofických rovnicích“ a při rozvoji určité stavové proměnné podle jistého řídicího parametru, jenž je „mnohočlenem určitého stupně“, zavádíme termín „redukovaný rozvoj“.

Budiž nyní  $\boldsymbol{\omega}$  úhlová rychlost rotace tělesa ve vybraném souřadnicovém systému. Poté vzhledem k souřadnicové soustavě  $Ox_1x_2x_3$  v prostoru pevné se tento systém otáčí s úhlovou rychlostí  $\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_0$  a platí

$$\dot{\boldsymbol{M}}_s = \dot{\boldsymbol{M}}_r + [\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_0, \boldsymbol{M}_r]. \quad (13.56)$$

Zde je  $\boldsymbol{M}_s$  moment hybnosti vzhledem k prostoru,  $\boldsymbol{M}_r$  kinetický moment vztahovaný ke zvolenému souřadnicovému systému. Za nepřítomnosti vnějších sil  $\dot{\boldsymbol{M}}_s = \mathbf{0}$  a dále

$$\dot{\boldsymbol{M}}_r = [\boldsymbol{M}_r, \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_0]. \quad (13.57)$$

Označíme-li  $\boldsymbol{M}$  moment hybnosti vzhledem k systému pevnému vůči tělesu, máme

$$\boldsymbol{M}_r = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_0, \quad (13.58)$$

kde je  $\boldsymbol{M}_0$  moment hybnosti odpovídající úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\Omega}_0$ .

Přejdeme k souřadnicovému systému pevnému vzhledem k tělesu, které se otáčí vůči prostoru s úhlovou rychlostí  $-\boldsymbol{\Omega}_0$ . Uvážíme-li (13.58), můžeme položit

$$\dot{\boldsymbol{M}} + \dot{\boldsymbol{M}}_0 - [\boldsymbol{\Omega}_0, \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_0] = [\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{\omega}] + [\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{\Omega}_0].$$

Při  $\dot{\boldsymbol{M}}_0 = \mathbf{0}$  pohybové rovnice tuhého tělesa v poli Coriolisových sil, indukované rotací systému vůči tělesu s konstantní rychlostí  $\boldsymbol{\Omega}_0$ , mají tvar

$$\dot{\boldsymbol{M}} = [\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{\omega}], \quad \boldsymbol{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{M}_0 = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}_0. \quad (13.59)$$

V (13.59) je  $\mathbf{I}$  tenzor setrvačnosti, který v souřadnicovém systému pevném vzhledem k tělesu nezávisí na čase.

S přihlédnutím k Eulerovým-Poissonovým pohybovým rovnicím těžkého setrvačnicku (otáčí-li se tuhé těleso kolem pevného bodu, který není jeho těžištěm, je vhodné zvolit tento bod za referenční bod a zavést moment tíže vzhledem k němu; takové těleso se nazývá těžkým setrvačnickem), pohybové rovnice tuhého tělesa v gravitačním poli a v poli Coriolisových sil zapisujeme ve tvaru

$$\dot{\boldsymbol{M}} = [\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{\omega}] + \mu g [\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}_0], \quad (13.60)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = [\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}], \quad \boldsymbol{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}; \quad (13.61)$$

$\mu$  je hmotnost tělesa,  $g$  zemské zrychlení,  $\boldsymbol{\gamma}$  jednotkový vektor ve směru síly tíže a  $\mathbf{l}_0$  polohový vektor těžiště.

Jak bylo již řečeno, mechanické systémy popisujeme v termínech grupy  $SO(3)$ , izomorfní grupě afinních zobrazení elipsoidu do sebe, která je podgrupou  $SDiffD$ . Proto spojujeme zobecněné tuhé těleso na této grupě, opatřené „hydrodynamickou metrikou“, s přesnými partikulárními řešeními rovnic hydrodynamiky. Při hledání takových dynamických systémů vyjeme z rovnic, popisujících pohyb rotující slabě stratifikované nestlačitelné tekutiny v Boussinesqově aproximaci

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} + 2[\boldsymbol{\Omega}_0, \mathbf{v}] = -\rho_0^{-1} \nabla p - \mathbf{g}T/T_0, \quad (13.62)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) T = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (13.63)$$

Zde je  $\mathbf{v}$  pole rychlosti,  $\rho_0$  střední hustota tekutiny,  $p$  tlak a  $T$  odchylka teploty prostředí od rovnovážné hodnoty  $T_0$ , spojené s odchylkou hustoty  $\rho$  od  $\rho_0$ ;  $T/T_0 = -\rho/\rho_0$ . Zajímá nás pohyb tekutiny v dutině elipsoidu

$$S(\mathbf{r}) = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 = 0$$

ve třídě prostorově-lineárních nedivergentních polí rychlosti

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^3 \omega_i(t) \mathbf{w}_i(\mathbf{r}), \quad (13.64)$$

tečných k okraji proudové oblasti ( $(\mathbf{w}_i, \nabla) S = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) a také v prostorově-lineárních polích teploty ( $\nabla T$  nezávisí na  $\mathbf{r}$ )

$$T(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{r}, \nabla T) = \frac{\partial T}{\partial x_1} x_1 \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial x_2} x_2 \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial x_3} x_3 \mathbf{k}; \quad (13.65)$$

$\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  jsou jednotkové vektory ve směru kartézských souřadnicových os. Vztahy (13.64) a (13.65) platí v souřadnicovém systému, jehož osy se shodují s hlavními osami elipsoidu. Nedivergentní pole  $\mathbf{w}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , jsou ortogonální:

$$\int_D (\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) dx_1 dx_2 dx_3 = 0, \quad i \neq j.$$

Poissonovy parametry  $\omega_i$  jsou spojeny se složkami vorticity vztahy

$$\Omega_{x_1} = \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_2 a_3} \omega_1, \quad \Omega_{x_2} = \frac{a_3^2 + a_1^2}{a_3 a_1} \omega_2, \quad \Omega_{x_3} = \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 a_2} \omega_3.$$

Na základě výše uvedených vztahů s přihlédnutím k Friedmannově rovnici a rovnici pro  $\mathbf{q} \doteq \nabla T/T_0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \{\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\Omega}_0, \mathbf{v}\} &= [\mathbf{g}, \mathbf{q}], \\ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{q} &= -\mathbf{q} \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta \mathbf{r}}, \end{aligned}$$

kde je  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} = (\mathbf{B}, \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A}, \nabla) \mathbf{B}$  Poissonova závorka vektorových polí  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , dospíváme k zápisu

$$\dot{\mathbf{M}} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0] + g[\mathbf{l}_0, \boldsymbol{\sigma}], \quad (13.66)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\sigma}]. \quad (13.67)$$

Zde je  $\mathbf{M} = \mathbf{l}\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{l}\boldsymbol{\omega}_0$ ,  $\mathbf{l}$  diagonální matice s nenulovými prvky  $I_1 = a_2^2 + a_3^2$ ,  $I_2 = a_3^2 + a_1^2$ ,  $I_3 = a_1^2 + a_2^2$ ,  $g$  zemské zrychlení,  $\mathbf{l}_0 = a_1 \cos \alpha_1 \mathbf{i} + a_2 \cos \alpha_2 \mathbf{j} + a_3 \cos \alpha_3 \mathbf{k}$  ( $\cos \alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  jsou směrové kosiny úhlů, které svírá směr vektoru  $\mathbf{g}$  s hlavními osami elipsoidu) a složky vektoru  $\boldsymbol{\sigma}$  jsou rozdíly teplot na hlavních poloosách elipsoidu při bezrozměrné hodnotě  $T_0$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = T_0^{-1} (a_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} \mathbf{i} + a_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \mathbf{j} + a_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} \mathbf{k}).$$

Povšimněme si, že (13.66), (13.67) se shodují, až na záměny  $\boldsymbol{\omega} \rightarrow -\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_0 \rightarrow -\boldsymbol{\omega}_0$ , s rovnicemi (13.60), (13.61), tj. s pohybovými rovnicemi tuhého tělesa v souřadnicovém systému otáčejícím se vzhledem k tělesu úhlovou rychlostí  $2\boldsymbol{\omega}_0$  a při  $\boldsymbol{\sigma} = 0$  (homogenní tekutina) s rovnicí (13.59) volného pohybu setrvačnicku v poli Coriolisových sil. Nutnost takových záměn je dána rozdílnými metrikami v mechanických a hydrodynamických systémech. Riemannova metrika konfiguračního prostoru, indukovaná kinetickou energií proudící tekutiny, je v případě grupy  $S\text{Diff}D$  proudové oblasti  $D$  pravoinvariantní na rozdíl od grupy  $SO(3)$  prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kde je levoinvariantní. Dvojnásobek rychlosti systému je dán tím, že rotor rychlosti je dvojnásobkem úhlové rychlosti lokálního rotačního pohybu tekutiny.

Ještě než přikročíme k výkladu barotropního hydrodynamického setrvačnicku v poli Coriolisových sil, řekněme si, že na (13.59) až (13.61) nahlížíme jako na model globálních barotropních a baroklinních toků v rotujících tekutinách.

Máme-li na mysli právě takový setrvačnick, jsou  $T$  a  $\sigma$  rovny nule a pohyb je popsán rovnicemi

$$\dot{\mathbf{M}} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0], \quad \mathbf{M} = \mathbf{l}\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{M}_0 = \mathbf{l}\boldsymbol{\omega}_0. \quad (13.68)$$

Po substituci  $\mathbf{M}' = \mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0$  nabývá systém (13.68) tvaru

$$\dot{\mathbf{M}}' = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{M}'], \quad \mathbf{M}' = \mathbf{l}(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\omega}_0). \quad (13.69)$$

Vynásobením (13.68) vektorem  $\boldsymbol{\omega}$  a (13.69) vektorem  $\mathbf{M}'$  získáme dva první integrály

$$2E = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{M}) = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2, \quad (13.70)$$

$$\mathbf{M}'^2 = (M_1 + 2M_{01})^2 + (M_2 + 2M_{02})^2 + (M_3 + 2M_{03})^2. \quad (13.71)$$

V hydrodynamice s integrálem (13.70) spojujeme zachování kinetické energie v uvažované třídě proudění. Druhý invariant (13.71) je důsledkem Kelvinova cirkulačního teorému. Jestliže bez újmy obecnosti položíme  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{0}$  a je-li  $C$  uzavřená kontura ohraničující infinitesimální orientovaný element plošky  $\delta\mathbf{s}$ , Kelvinův invariant lze vyjádřit ve tvaru

$$K = \int_C (\mathbf{v}, \delta\mathbf{l}) = (\boldsymbol{\Omega}, \delta\mathbf{s}).$$

Zachování  $K$  značí, že

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Omega}, \delta\mathbf{s}) = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \delta\mathbf{s} + \boldsymbol{\Omega} \frac{d\delta\mathbf{s}}{dt} = 0; \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla). \end{aligned}$$

Protože v homogenní tekutině vyhovuje  $\boldsymbol{\Omega}$  Helmholtzově rovnici

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = (\boldsymbol{\Omega}, \nabla)\mathbf{v},$$

dostáváme

$$\frac{d\delta\mathbf{s}}{dt} = -\delta\mathbf{s} \frac{\delta\mathbf{v}}{\delta\mathbf{r}}.$$

Pro veličinu  $\delta\mathbf{s}$  tedy platí rovnice analogická dříve uvedené rovnici pro časovou změnu vektoru  $\mathbf{q}$ , popisující evoluci  $\nabla T$  v nehomogenní tekutině.

Naznačme postup, kterým lze prokázat platnost věty o smyslu invariantu (13.71). Pro uvažovanou třídu proudění vezměme za  $\delta\mathbf{s}$  element plošky se středem shodujícím se s počátkem souřadnicového systému v těžišti elipsoidu. Při proudění s konstantní vorticitou, které zde máme na mysli, kde částice tekutiny v počátku referenčního systému zůstává v klidu, se vymezený element, považovaný za tekutou plochu, bude jen deformovat a pootáčet v prostoru, aniž přitom dochází ke změně polohy jeho středu. Proto  $\delta\mathbf{s} = \delta\mathbf{s}(t)$  a tato veličina je funkcí času a nikoliv prostorových souřadnic. Ovšem pak  $(d/dt)(\mathbf{M}, \mathbf{l}) = 0$ , kde je  $\dot{\mathbf{l}} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{l}]$ ,  $I_i = (a_i/a_1 a_2 a_3) \delta s_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  a tak Kelvinův invariant můžeme zapsat ve tvaru  $K = (\mathbf{M}, \mathbf{l})$ . Závěr je nasnadě. Protože rovnice pro vektor  $\mathbf{M}$  je formálně totožná s Poissonovou rovnicí, stačí provést záměnu  $\mathbf{l}$  za  $\mathbf{M}$  a tak je platnost tvrzení o invariantu (13.71) zřejmá. Podotkněme, že při  $\boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$  místo  $\mathbf{M}$  je třeba uvažovat  $\mathbf{M}' = \mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0$  a příslušná rovnice je rovněž formálně shodná s Poissonovou rovnicí.

Vraťme se k zápisům (13.70) a (13.71). Odtud získáme informace o chování barotropního setrvačnicku v poli Coriolisových sil, aniž bychom museli integrovat jeho pohybové rovnice. Zjistíme, že v prostoru momentů hybnosti jsou trajektorie setrvačnicku křivky, představující průniky „energetických“ elipsoidů

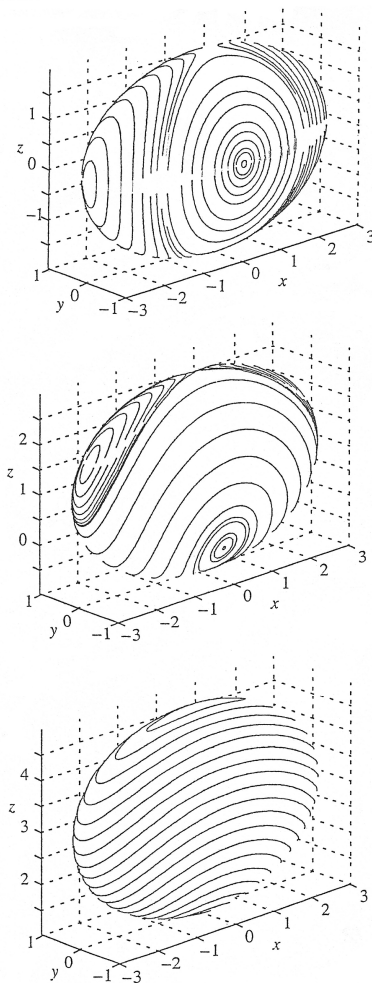
$$\frac{M_1^2}{2EI_1} + \frac{M_2^2}{2EI_2} + \frac{M_3^2}{2EI_3} = 1$$

s „cirkulačními“ kulovými plochami

$$\frac{(M_1 + 2M_{01})^2}{M'^2} + \frac{(M_2 + 2M_{02})^2}{M'^2} + \frac{(M_3 + 2M_{03})^2}{M'^2} = 1$$

se středem v bodě  $-2\mathbf{M}_0^2$  a s poloměrem  $|\mathbf{M}'| = |\mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0|$ . Typické fázové trajektorie dynamického systému (13.68) jsou na obr. 13.4 a vztahují se k různým hodnotám Rossbyho parametru  $\varepsilon \doteq |\mathbf{M}|/|2\mathbf{M}_0|$ . Z hlediska hydrodynamiky tyto portréty ilustrují proces postupného zániku složitých pohybů při narůstajícím vlivu Coriolisových sil. Při poklesu hodnot  $\varepsilon$  (počínaje  $\varepsilon = \infty$ ) dochází postupně k „vymizení“ nejprve jednoho a poté i druhého hyperbolického bodu.





Obr. 13.4 Změny fázových portrétů pro trajektorie pohybu trojosého elipsoidu v rotujícím souřadnicovém systému při zmenšujícím se parametru  $\varepsilon$  [21].

Poznámka 15: necht'  $\mathbf{x}_0$  je rovnovážným stavem soustavy  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , kde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  a  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Označme  $\mathbf{A} = \mathbf{Df}(\mathbf{x}_0)$  diferenciální zobrazení  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  v bodě  $\mathbf{x}_0$  (Jacobiho matici zobrazení  $\mathbf{f}$  v bodě  $\mathbf{x}_0$ ). Rovnovážný stav nazýváme hyperbolickým, jestliže všechna vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  mají nenulové reálné části. Potud definice. Dodejme, že diferenciální rovnice  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  je lokálně strukturálně stabilní v okolí svého rovnovážného stavu  $\mathbf{x}_0$  právě tehdy, je-li rovnovážný stav  $\mathbf{x}_0$  hyperbolický. Rovnice  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  je strukturálně stabilní, existuje-li takové okolí  $U$  pole  $\mathbf{f}$ , že pro každé pole  $\mathbf{v} \in U$  je soustava  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  topologicky orbitálně ekvivalentní se soustavou  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . To značí, že existuje homeomorfismus  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , který zobrazuje trajektorie jedné soustavy na trajektorie druhé

soustavy při zachování směru jejich probíhání, aniž parametrizace trajektorií musí být zachována.

Globálním geofyzikálním tokům odpovídají malá Rossbyho čísla, při nichž trajektorie barotropního setrvačnicku jsou průniky elipsoidu se souborem ploch ortogonálních k vektoru  $\mathbf{M}_0$ . Odtud docházíme k poznatku:

1. Fázový portrét geofyzikálních toků hydrodynamického barotropního setrvačnicku tvoří uzavřené eliptické trajektorie bez hyperbolických bodů;

2. Při malých Rossbyho číslech se prakticky zachovává projekce momentu hybnosti do směru  $\mathbf{M}_0$  (s přesností až na  $O(\varepsilon^2)$ , kde je  $O$  Landauův symbol.

Pohyb po uzavřených trajektoriích nejjednodušeji popíšeme za předpokladu, že směr vektoru  $\mathbf{M}_0$  leží ve směru jedné z hlavních os elipsoidu, řekněme  $z$  (tj.  $x_3$ ). Tehdy (13.68) lze přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 + 2I_3 \omega_0 \omega_2, \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 + 2I_1 \omega_0 \omega_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2. \end{aligned} \quad (13.72)$$

Jestliže  $\varepsilon \ll 1$ ,  $\dot{M}_3 = O(\varepsilon^2)$ ,  $M_3 = M_{30} + O(\varepsilon^2)$ ,  $M_{30} = \text{konst} = O(\varepsilon)$ , s přesností až na členy řádu  $\varepsilon^2$  pro proměnné  $X = (I_2)^{1/2} M_1$ ,  $Y = (I_1)^{1/2} M_2$  platí rovnice

$$\dot{X} = 2(I_1 I_2)^{-1/2} I_3 \omega_0 Y, \quad \dot{Y} = -2(I_1 I_2)^{-1/2} I_3 \omega_0 X.$$

Odtud nahlédneme, že se koncový bod vektoru  $\mathbf{M}$  a také vektoru  $\mathbf{M}'$  pohybuje po eliptické dráze  $M_1^2 / I_1 + M_2^2 / I_2 = \text{konst}$  s úhlovou rychlostí

$$\boldsymbol{\sigma} = -2I_3 (I_1 I_2)^{-1/2} \boldsymbol{\omega}_0 = -2a_1 a_2 (I_1 I_2)^{-1/2} \boldsymbol{\Omega}_0,$$

tedy ve směru proti rotaci souřadnicového systému.

Úhrnem lze říci: Při duálním přístupu k pohybovým rovnicím tuhého tělesa upevněného v bodě lze takové pohyby barotropního setrvačnicku spolu s přibližnou invariancí projekce jeho momentu hybnosti do směru vektoru  $\mathbf{M}_0$  považovat za preobraz šíření planetárně-setrvačných vln. Tyto vlny unášejí moment hybnosti ve směru proti rotaci Země a platí přibližná invariance (lagrangeovská) vertikální vorticity globálních atmosférických pohybů [22].

Stále mějme na zřeteli to, že z pohledu Arnoldovy konstrukce zobecněného tuhého tělesa (obsahuje Eulerovy pohybové rovnice dokonalé teku-

tiny) a jejího rozšíření na pohyby ve vnějších silových polích, můžeme považovat pohybové rovnice těžkého setrvačnicku v poli Coriolisových sil za model baroklinního toku rotující tekutiny v gravitačním poli. Při nulové gravitační síle interpretujeme rovnice mechaniky jako model barotropního proudění v rotující tekutině. V tomto ohledu nám více napoví tři prvé integrály systému (13.66), (13.67):

$$E = (1/2)(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{M}) + g(\mathbf{l}_0, \boldsymbol{\sigma}), \quad \Pi = ((\mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0), \boldsymbol{\sigma}), \quad G = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}). \quad (13.73)$$

Tyto integrály po řadě představují zákon zachování celkové energie

$$E = (1/2)\rho_0 \int_D (\mathbf{v}, \mathbf{v}) dx_1 dx_2 dx_3 - (\rho_0 / T_0) \int_D (\mathbf{g}, \mathbf{r}) T dx_1 dx_2 dx_3, \quad (13.74)$$

lagrangeovskou invarianci potenciálového víru

$$\Pi = ((\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\Omega}_0), \nabla T) \quad (13.75)$$

a teploty  $T$  v uvažované třídě řešení výchozích rovnic hydrodynamiky (13.62), (13.63).

Poznámka 16: systematicky zde používáme tvaru „potenciálový“ místo „potenciální“, aby nedošlo k nedorozumění. Termín „potenciální“ je oprávněn u potenciální energie a používá se též ve sloučeninách, kde chybný výklad nehrozí: „ekvipotenciální plocha“. Rovněž v hydrodynamice se mluví o proudění potenciálovém a nikoliv potenciálním [23, 24].

V termínech grupového formalismu, uplatňujícího se v konstrukci zobecněného tuhého tělesa, budeme považovat veličiny (13.73) za mechanické preobrazy hydrodynamických invariantů (13.74), (13.75) a teploty  $T$ . A to v tom smyslu, že oběma modelům přisuzujeme základní vlastnosti symetrie rovnic hydrodynamiky.

Další výklad, směřující k získání kvazigeostrofické aproximace pohybových rovnic baroklinní tekutiny, započneme výčtem požadavků příznačných pro geofyzikální hydrodynamiku:

1. Rossbyho parametr  $\varepsilon \doteq U / f_0 L = \omega / f_0$  spolu s parametry  $\xi = f_0^2 L^2 / g H_0 = O(\varepsilon)$ ,  $\eta = N^2 H_0 / g = O(\varepsilon)$  považujeme za malá čísla. Zde je  $f_0$  Coriolisův parametr,  $L$  a  $H$  charakteristické horizontální a vertikální měřítko geofyzikálních toků,  $U$  a  $\omega$  jejich typická rychlost a vertikální vorticity. Dále je  $N$  Bruntova-Vaisalova frekvence  $N = ((g/T_0)(\partial T/\partial x_3))^{1/2}$ ,  $\partial T/\partial x_3 > 0$ ;

2. Pohyb považujeme za kvazistatický a kvazigeostrofický tj. s přesností až na  $O(\varepsilon)$  užíváme vztahu pro termální vítr;

3. Platí rovnice zachování potenciálového víru a potenciálové teploty (v našem případě  $T$ ), jejichž rozvoj podle malého parametru  $\varepsilon$  provádíme

s přesností až na  $O(\varepsilon^2)$ . Také požadujeme, aby směr vektoru  $\mathbf{g}$  byl rovnoběžný s hlavní osou elipsoidu  $0x_3$  (poloosa  $a_3$ ), která je osou rotace systému s úhlovou rychlostí  $\boldsymbol{\Omega}_0$  a uvážíme výše uvedené požadavky pro získání kvazigeostrofické aproximace rovnic (13.66), (13.67).

Jako parametry  $\varepsilon$ ,  $L^2$  a  $H_0$  v úvahu připadají veličiny

$$\varepsilon = \omega / 2\omega_0, \quad \omega = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)^{1/2}, \\ 2L^2 = I_3 = a_1^2 + a_2^2, \quad H_0 = a_3.$$

Poté dostáváme

$$\xi = \frac{4\omega_0^3(a_1^2 + a_2^2)}{2a_3g} = \frac{2\omega_0^2 I_3}{a_3g} = O(\varepsilon), \quad (13.76)$$

$$N^2 = \frac{g}{T_0} \frac{\partial T}{\partial x_3} = \frac{\sigma_3 g}{a_3}, \quad \eta = \frac{a_3 N^2}{g} = \sigma_3 = O(\varepsilon). \quad (13.77)$$

Pro rovnice hydrodynamiky (13.62), (13.63) v Boussinesqově aproximaci píšeme vztah pro termální vítr ve tvaru

$$-2(\boldsymbol{\Omega}_0, \nabla)\mathbf{v} = T_0^{-1}[\mathbf{g}, \nabla T] + O(\varepsilon). \quad (13.78)$$

Podle (13.78) poměr zanedbaných členů k členům zbývajícím je řádu  $\varepsilon$ . Ve složkách (13.78) platí

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = -\frac{gl}{2\Omega_0 T_0} \frac{\partial T}{\partial x_2} + O(\varepsilon), \\ \frac{\partial w}{\partial x_3} = \frac{gl}{2\Omega_0 T_0} \frac{\partial T}{\partial x_1} + O(\varepsilon). \quad (13.79)$$

Přihlédneme-li k rovnicím (13.66), (13.67), pro termální vítr dostáváme

$$[\boldsymbol{\omega}, 2\mathbf{M}_0] + g[\mathbf{l}_0, \boldsymbol{\sigma}] = O(\varepsilon) \quad (13.80)$$

a tedy ( $\mathbf{l}_0 = (0, 0, -a_3)$ )

$$\omega_2 = -\frac{\sigma_2 a_3 g}{2I_3 \omega_0} + O(\varepsilon), \quad \omega_1 = -\frac{\sigma_1 a_3 g}{2I_3 \omega_0} + O(\varepsilon). \quad (13.81)$$

Vzmeme-li nyní na vědomí (13.79), dospíváme k vyjádření  $\omega_2 \propto \partial u / \partial x_3 \propto -\partial T / \partial x_2$ ,  $\omega_1 \propto -\partial w / \partial x_3 \propto -\partial T / \partial x_1$  a tyto výrazy lze považovat za složky termálního větru.

Na základě zápisů (13.81) a (13.76) můžeme položit  $\omega_2/\omega_0 \propto \omega_1/\omega_0 \propto O(\varepsilon) \propto \sigma_2/O(\varepsilon) \propto \sigma_1/O(\varepsilon)$  a tak bude  $\sigma_1 \propto \sigma_2 = O(\varepsilon^2)$ .

Naším dalším počinem je přepis rovnic (13.66), (13.67) do složkového tvaru:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 + 2I_3 \omega_0 \omega_2 + \sigma_2 a_2 g, \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 - 2I_3 \omega_0 \omega_1 + \sigma_1 a_3 g, \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1; \end{aligned} \quad (13.82)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 &= \omega_2 \sigma_3 - \omega_3 \sigma_2, \\ \dot{\sigma}_2 &= \omega_3 \sigma_1 - \omega_1 \sigma_3, \\ \dot{\sigma}_3 &= \omega_1 \sigma_2 - \omega_2 \sigma_1. \end{aligned} \quad (13.83)$$

Pro pevné body systému (13.82) a (13.83), popisující stacionární rotační režimy (k rotaci dochází kolem hlavních os elipsoidu), platí vztahy

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega_{30}, \\ & \sigma_3 = \sigma_{30}; \\ \text{(b)} \quad & \omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \sigma_1 = \sigma_3 = 0, \quad \omega_2 = \omega_{20}, \\ & \sigma_2 = \sigma_{20}, \\ & 2I_3 \omega_0 \omega_{20} + \sigma_{20} a_3 g = 0; \\ \text{(c)} \quad & \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \omega_1 = \omega_{10}, \\ & \sigma_1 = \sigma_{10}, \\ & 2I_3 \omega_0 \omega_{10} + \sigma_{10} a_3 g = 0. \end{aligned}$$

Proměnné označené indexem 0 mohou nabývat libovolných reálných hodnot, nikoliv však proměnné s vnějším parametrem  $\omega_0$ . Ještě dodejme, že libovolným reprezentantem vlastnosti (b) či (c) je netriviální přísně geostrofický stacionární pohybový režim při libovolné, od nuly různé hodnotě  $\omega_0$ .

Pokračujme v úvahách, jejich smyslem a cílem je získání konečného tvaru rovnic pro proměnné  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  a tím i kvazigeostrofické aproximace rovnic (13.81) a (13.82), popisujících pohyb hydrodynamického setrvačnicku v poli Coriolisových sil. Nejprve si povšimněme, že z rovnice (13.83) s přihlédnutím k odhadům  $\sigma_1 \propto \sigma_2 = O(\varepsilon^2)$ ,  $O_3 \propto O(\varepsilon)$  a vztahu pro termální vítr (13.81) s ohledem na zápis  $\xi \doteq 2\omega_0^2 I_3 / a_3 g = O(\varepsilon)$  dostaneme  $\dot{\sigma}_3 = O(\varepsilon^4)$ . Je tedy  $\sigma_3 = \sigma_{30}$  s vysokou přesností konstantní veličinou a lze uvažovat rovnice

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1 &= \omega_2 \sigma_{30} - \omega_3 \sigma_2, \\ \dot{\sigma}_2 &= \omega_3 \sigma_1 - \omega_1 \sigma_{30}.\end{aligned}\tag{13.84}$$

Na (13.84) nahlížíme jako na analogii „redukovaného“ rozvoje (podle parametru  $\varepsilon$ ) vztahu pro „potenciálovou“ teplotu (přesněji pro její gradient), vyjádřenou v termínech termálního větru.

Nyní je třeba říci, co míníme potenciálovým vírem v kvazigeostrofické aproximaci. Tohoto záměru docílíme, vezmeme-li na vědomí, že v důsledku výše provedených odhadů lze výraz pro (viz (13.73))

$$\Pi = ((\mathbf{M} + 2\mathbf{M}_0), \boldsymbol{\sigma}) = I_1 \omega_1 \sigma_2 + I_2 \omega_2 \sigma_2 + 2I_3 \omega_0 \sigma_3$$

vyjádřit vztahem

$$\Pi = I_3(2\omega_0 + \omega_3)\sigma_{30} + O(\varepsilon^3).\tag{13.85}$$

Odtud vidíme, že první sčítanec na pravé straně (13.85)

$$\Pi = I_3(2\omega_0 + \omega_3)\sigma_{30}, \quad \dot{\Pi} = 2I_3\sigma_{30}\omega_3$$

představuje potenciálový vír v kvazigeostrofické aproximaci. Jeho evoluci popisuje prvá rovnice v systému (13.82), kterou lze s přihlédnutím k schématu (a) až (c) získat z rovnic  $\dot{F} = 0$ , (13.81), (13.83) a dvou posledních rovnic (13.83).

Vyslovme nyní důležité tvrzení o kvazigeostrofické aproximaci pohybové rovnice hydrodynamického setrvačnicku v poli Coriolisových sil:

Věta 1. Kvazigeostrofická aproximace rovnic (13.82) a (13.83) šestého řádu popisujících pohyb hydrodynamického těžkého setrvačnicku v poli Coriolisových sil, nás přivádí k dynamickému systému třetího řádu ve tvaru

$$\begin{aligned}I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_2 - I_1)\omega_1 \omega_2, \\ \dot{\omega}_1 &= -\left(\frac{a_3 g}{2I_3 \omega_0} \sigma_{30} + \omega_3\right) \omega_2, \\ \dot{\omega}_2 &= \left(\frac{a_3 g}{2I_3 \omega_0} \sigma_{30} + \omega_3\right) \omega_1.\end{aligned}\tag{13.86}$$

Protějškem tohoto systému jsou rovnice pro „pomalé“ proměnné v teorii relaxačních kmitů, v našem případě jsou to rovnice popisující pomalou evoluci hlavních složek globálních toků, a to vertikální vorticity tekutiny a termálního větru.

Poznámka 17: v literatuře se systémy sestávající z „pomalých“ a „rychlých“ proměnných nazývají Tichonovy systémy. O těchto systémech stručně pojednáme v oddílu 13.12.

Aditivní konstantu v závorkách posledních dvou rovnic systému (13.86) stanovíme, vydělíme-li obě strany rovnic systému (13.86) veličinou  $\omega_0^2$ , přihlídneme k výrazu pro  $N$  v (13.77) a k vztahům  $a_3 = H_0$ ,  $I_3 = 2L^2$  a  $4\omega_0^2 = f_0^2$ . Dostáváme

$$S \doteq \frac{a_3 g}{2\omega_0^2 I_3} \sigma_{30} = \frac{H_0^2 N^2}{f_0^2 L}. \quad (13.87)$$

V geofyzikální hydrodynamice považujeme veličinu  $S$  za kritérium podobnosti s významem parametru stratifikace.

Věnujme i nadále pozornost systému (13.86). Po zavedení bezrozměrných proměnných

$$X = -\frac{\omega_1}{\omega_0}, \quad Y = -\frac{\omega_2}{\omega_0}, \quad Z = S + \frac{\omega_3}{\omega_0},$$

$$\tau = \omega_0 t \quad (\text{pomalá proměnná})$$

přechází (13.86) na systém rovnic (nadále bez újmy obecnosti nechť je  $a_1 > a_2$ )

$$\dot{X} = -YZ, \quad \dot{Y} = XZ, \quad \dot{Z} = \Gamma XY, \quad (13.88)$$

kde  $\Gamma = (I_2 - I_1)/I_3 = (a_1^2 - a_2^2)/(a_1^2 + a_2^2)$ . Systém (13.88) má dva pozitivně definitní prvky integrály pohybu

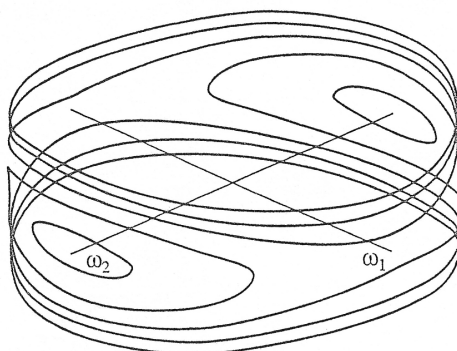
$$2E = \Gamma X^2 + Z^2, \quad \theta = X^2 + Y^2. \quad (13.89)$$

Prvý z nich vyjadřuje celkovou energii systému, druhý chápeme jako zachování entropie. Nyní již můžeme vyslovit další větu o kvazigeostrofické aproximaci pohybových rovnic těžkého hydrodynamického setrvačnicku v poli Coriolisových sil:

**Věta 2.** Kvazigeostrofická aproximace pohybových rovnic těžkého hydrodynamického setrvačnicku v poli Coriolisových sil je ekvivalentní Eulerovým rovnicím mechanického setrvačnicku, v nichž, jako závislé proměnné, vystupují vertikální vorticity tekutiny a složky termálního větru.

Podle této věty je „pomalá“ varieta (simplest slow manifold) tj. varieta s pomalou dynamikou těžkého setrvačnicku v poli Coriolisových sil, vnořená do trojdimenzionálního podprostoru jeho šestidimenzionálního fázového

prostoru průnikem „vertikálních“ kruhových válců s „horizontálními“ válci eliptického průřezu, jehož další osa je osou  $OX$ , je-li  $0 < \Gamma < 1$  (obr. 13.5).



Obr. 13.5 Fázový portrét geostrofického pohybu těžkého setrvačnicku [22].

V matematice samotnou varietou rozumíme souvislý topologický prostor, jehož každému bodu přísluší okolí, které lze vzájemně jednoznačně a spojitě zobrazit na okolí běžného Eukleidova prostoru. Názornými příklady variet jsou plochy, které jsou částí (jsou vnořeny) do trojdimenzionálního Eukleidova prostoru. Je-li  $X$  normovaný lineární prostor s normou  $\| \cdot \|_X$  a  $Y$  normovaný lineární prostor s normou  $\| \cdot \|_Y$ , pak prostor  $X$  je spojitě vnořen do prostoru  $Y$ , jestliže  $X \subset Y$  a existuje konstanta  $c$  tak, že pro všechna  $u \in X$  je  $\|u\|_Y = c\|u\|_X$ . Výsledky vyplývající z existence a stability zmíněné variety (také hovoříme přímo o kvazigeostrofické varietě nebo o hydrodynamické varietě) se mohou uplatnit i v matematické teorii klimatu, založené na teorii dynamických systémů a jejich generických bifurkacích<sup>\*)</sup>.

Podotkněme, že uvedenými vlastnostmi (a) až (c) stacionárních přísně geostrofických řešení úplného systému pohybových rovnic (13.81) až (13.83) zcela popíšeme pevné body redukováného systému (13.88):

$$(a) \quad X = Y = 0, \quad Z = Z_0,$$

<sup>\*)</sup> Vlastnosti trajektorií toku příslušného k vektorovému poli nazýváme generickými, mají-li je „téměř všechna“ vektorová pole. Říkáme, že nějaká vlastnost je splněna pro téměř všechna  $x \in \bar{\Omega}$  (skoro všude) v uzávěru  $\bar{\Omega}$  množiny  $\Omega$ , je-li splněna pro všechna  $x$  z množiny  $\Omega \setminus M$ , kde  $M \subset \bar{\Omega}$  je množina s nulovou Lebesgueovou mírou. Vezmeme-li např. ve vektorovém prostoru  $\mathbb{R}^n$  nějakou uspořádanou  $n$ -tici vektorů, pak skoro ve všech případech jsou tyto vektory lineárně nezávislé. Slovo bifurkace znamená rozdělení a používá se v širším významu pro označení různých kvalitativních změn nebo metamorfóz různých objektů při změnách parametrů, na nichž tyto objekty závisí. Teorii generických bifurkací je možno považovat za dynamickou verzi teorie singularit diferencovatelných zobrazení, jejíž speciálním případem je teorie známá pod názvem teorie katastrof. Vstup teorie dynamických systémů do geofyzikální hydrodynamiky a do matematické teorie klimatu (mathematics of climate modeling) považujeme za velice progresivní trend, který ve svých důsledcích dost možná zmenší odstup mezi čistým a aplikovaným výzkumem v oblastech hydrodynamiky, který mnohdy vedl k potížím v dorozumívání.



- (b)  $X = Z = 0, \quad Y = Y_0,$   
 (c)  $Y = Z = 0, \quad X = X_0.$

Veličiny s nulovými indexy mohou nabývat libovolných reálných hodnot a nulová řešení  $X = Y = 0$  při  $S \neq 0$ , popisující cirkulaci kolem vertikální osy, jsou netriviální reprezentací (a).

Při kvazigeostrofické aproximaci představují řešení (a) a (b) stabilní stavy, zatímco řešení (c) je nestabilní. Proto lze veličinu  $\Gamma X^2$  ve výrazu pro energii (13.89) považovat za dostupnou (available) potenciální energii, schopnou transformace v kinetickou energii vertikální vorticity.

Průběh fázových trajektorií (fázový portrét) pro různé hodnoty  $E$  je na [obr. 13.6](#). Stacionární bod odpovídající řešení (b) je při uvažované aproximaci bodem stabilním, příslušejícím stabilní rotaci setrvačnicku kolem krátké osy. Další stacionární bod (c) a trajektorie z něho vycházející, jsou nestabilní. Pro periodu pohybu po uzavřené orbitě dostáváme rovnici

$$\frac{d\varphi}{dt} = (2E - \Gamma\theta \sin^2 \varphi)^{1/2},$$

kteřá je řešitelná kvadraturami ( $\operatorname{tg} \varphi = Y/X$ ), tj. elementárními funkcemi. Trajektorie obtáčí kruhový válec při  $\Gamma\theta < 2E$  a fáze  $\varphi$  se mění od 0 do  $2\pi$ . Ještě dodejme, že při velkých hodnotách  $E$  je pohyb po orbitě systému blízký ke kruhovému pohybu s frekvencí  $f = d\varphi/dt = (2E)^{1/2}$ .

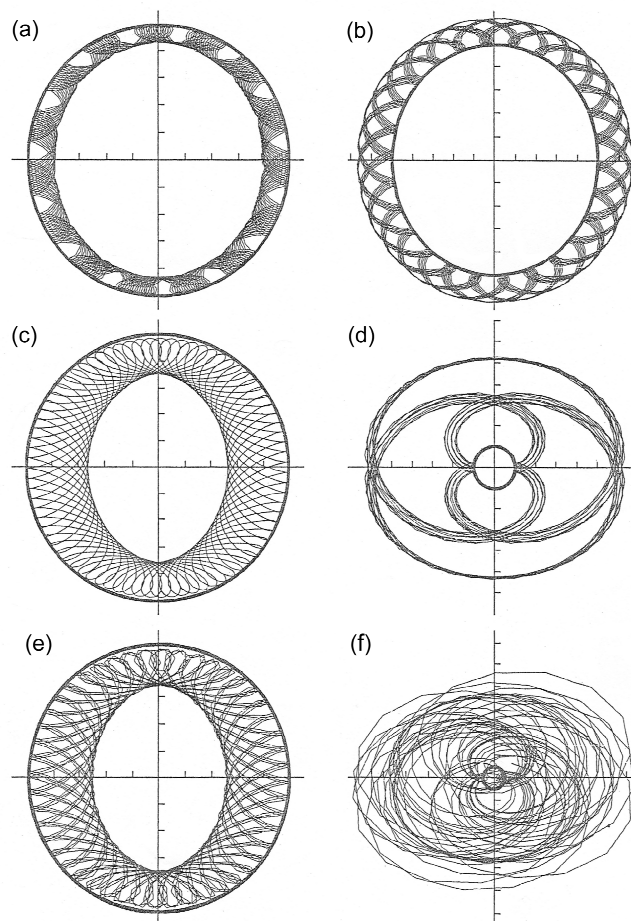
Poznámka 18: uvážíme-li přibližnou invarianci  $\sigma_3$ , lze první integrály výchozího systému (13.82) a (13.83)  $2E = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 - 2\sigma_3 a_3 g$ ,  $\theta = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$  zapsat ve tvaru

$$2E' = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2, \quad \theta' = \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

Dříve než pojednáme o struktuře a možné stabilitě pomalé variety hydrodynamického těžkého setrvačnicku v poli Coriolisových sil, zdůrazněme fakt, že rovnice pomalých pohybů musí být kvadraticky nelineárním dynamickým systémem 3. řádu se dvěma pozitivně definitními invarianty pohybu. Tento systém je ekvivalentní Eulerovým pohybovým rovnicím klasického setrvačnicku, které záměnou proměnných lze vždy převést na tvar (13.88). Avšak je třeba říci, že první z integrálů (13.89) po provedené záměně proměnných přechází na  $2E'$  jen tehdy, když  $S = 0$ . Proto považujeme parametr stratifikace  $S$  za míru odklonu fázových trajektorií výchozího modelu od variety systému (13.88).

Této otázce nyní věnujme pozornost, zaměřenou na výsledky numerických experimentů s kvazigeostrofickými a výchozími rovnicemi. Výsledky výpočtů budeme ilustrovat na průběhu trajektorií v projekci na fázový

prostor geostrofického systému  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ . Proudovou oblastí přitom bude dutina elipsoidu s poloosami  $a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = 2$ . Počáteční podmínky spo-



Obr. 13.6 Pohyb stratifikované tekutiny v trojosém elipsoidu. Projekce fázových trajektorií na rovinu  $(\omega_1, \omega_2)$ . Silněji je znázorněna geostrofická aproximace, slaběji „přesná“ trajektorie. Hodnoty parametru stratifikace činí:  $S = 0,2$  (a),  $-0,2$  (b),  $0,6$  (c),  $-0,6$  (d),  $0,65$  (e) a  $-0,65$  (f) [22].

jíme s nestabilitou kvazigeostrofického tripletu  $\boldsymbol{\omega} = (0, 1, 0)$  při počáteční perturbaci,  $\boldsymbol{\omega}' = (0, 0, 10^{-5})$  a příslušné hodnoty  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  nalezneme ze vztahů pro termální vítr. Určujícím parametrem je parametr stratifikace  $S$  [22].

Fázové portréty systémů jsou na obr. 13.7 a 13.8 v pořadí rostoucího modulu  $S$ :  $0 \leq |S| \leq 1$ . Tato volba odpovídá podmínkám charakteristickým

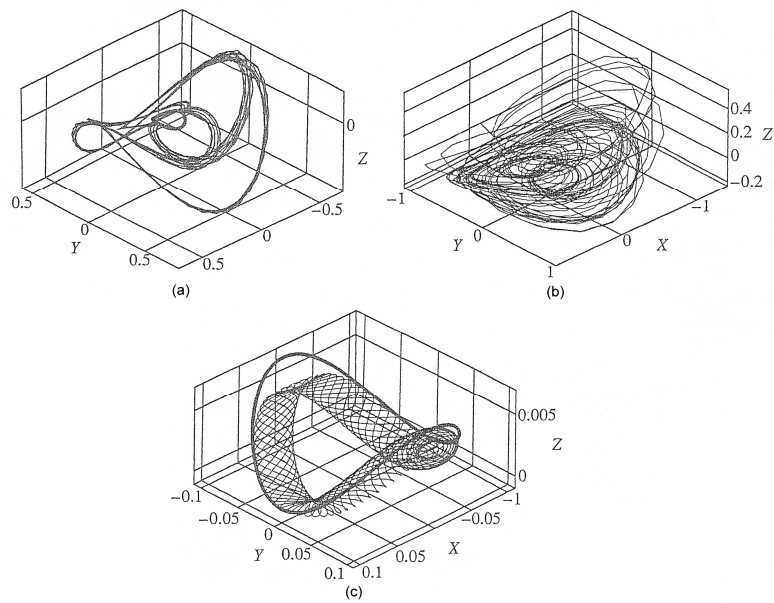
pro zemskou atmosféru; parametr  $S$  je neměnný toliko v kvazigeostrofické aproximaci. Silně vyznačené křivky přísluší kvazigeostrofickému tripletu, slabé čáry jsou projekcemi fázových trajektorií výchozího modelu na dvojdimenzionální a třidimenzionální podprostor závisle proměnných.

Z obr. 13.7, 13.8 je patrné, že dochází k odklonu od kvazigeostrofického stavu tím více, čím větší hodnoty parametr  $S$  dosahuje. Nicméně, při všech uvažovaných velikostech parametru stratifikace leží „přesná“ trajektorie v okolí orbity kvazigeostrofické aproximace a vzniká dojem, že při menších hodnotách  $S$  je kvazigeostrofická varieta tvořena uzavřenými oboustranně „zrcadlovými plochami“, odrážejícími fázové trajektorie neredukovaného modelu. Při  $S > 0$  leží trajektorie uvnitř zrcadel, při  $S < 0$  v jejich vnějšku. Popsaná situace zůstává zachována dokonce tehdy, když ageostrofická odchylka je srovnatelná s geostrofickou hodnotou, a to až do  $S = 1$  (není to kritická hodnota parametru stratifikace; případy, kdy  $S > 1$  neuvažujeme) pro kladná  $S$  a  $|S| = 0,6$  pro záporná  $S$ . V okolí této hodnoty  $S$  dochází k průchodu trajektorií zrcadlovou plochou z vnější strany. Numerické experimenty dokládají, že při  $S = -0,65$  nastává kvalitativní změna fázového portréту: v konečném čase ( $T \sim 10^2$ ) trajektorie začínají vyplňovat jim dříve nedostupný prostor ( $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ) a generuje se chaos. Od tohoto okamžiku se mění topologie fázových portrétů jak pro kladné, tak i záporné hodnoty  $S$ . Podle obr. 13.7 popsané situaci předchází utvářející se symetrie fázového portréту.

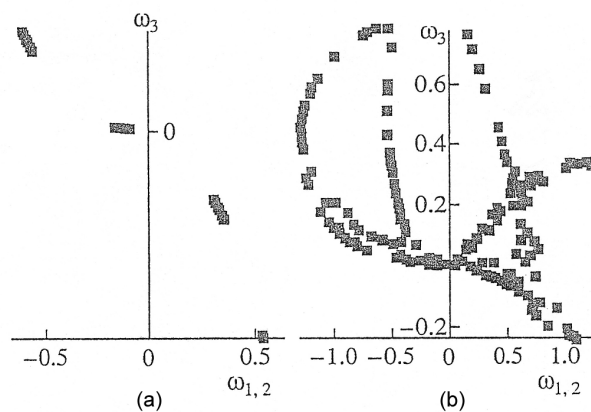
Poznámka 19: termín „chaotický“ obvykle používáme pro popis náhodného pohybu v disipativních systémech a termín „stochastický“ vztahujeme k hamiltonovským systémům. I když lze nahlížet na oba termíny jako na různá vyjádření „stupně náhodnosti“, obvykle je považujeme za synonyma. Řečeno intuitivně, máme náhodný (stochastický) proces tehdy, když jistá veličina se mění v čase náhodným způsobem podle určitých pravděpodobnostních zákonitostí. Dá se pak pro každý okamžik mluvit např. o pravděpodobnosti toho, že zkoumaná veličina (jde-li o veličinu nabývající reálných hodnot) nabyla hodnoty z určitého intervalu; dá se také mluvit o pravděpodobnosti toho, že celkový časový průběh veličiny má tu a tu vlastnost, ovšem jen pokud jde o vlastnost v jistém smyslu „dostatečně jednoduchou“<sup>\*)</sup>.

Změnu v chování trajektorií při poklesu hodnot  $S$  od 0,6 do  $-0,65$  dokumentuje obr. 13.8, na němž jsou zakresleny průsečíky trajektorií s rovinou  $\omega_1 = 0$  (levá část obrázku) a  $\omega_2 = 0$  (pravá část obrázku). Po ztrátě symetrie fázového portréту nabývá plocha, na níž leží trajektorie, velmi komplikovaný tvar.

<sup>\*)</sup> Pro zájemce o dostatečně přesnou, i když ne zcela standardní, definici stochastického procesu v případě veličiny s číselnými hodnotami připojujeme: Stochastický proces je dán, je-li dána neprázdná množina  $T \subset \mathbb{R}^1$  (velmi často se za  $T$  bere množina všech nezáporných reálných čísel nebo všech přirozených čísel), neprázdná množina  $A \subset \mathbb{R}^T$  (množina přípustných časových průběhů čili realizací stochastického procesu) a pravděpodobnostní rozdělení na  $A$  splňující jisté podmínky: přesněji řečeno, je dána množinová  $\sigma$ -algebra  $\mathfrak{A}$ .



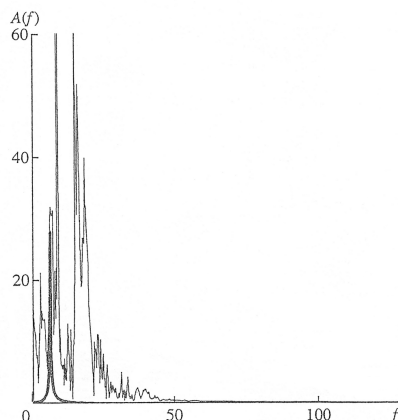
Obr. 13.7 Fázová trajektorie „přesného“ a geostrofického režimu (silnější křivka) v prostoru proměnných  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  pro hodnoty parametru stratifikace  $S = -0,6$  (a),  $-0,65$  (b) a  $0,6$  (c) [22].



Obr. 13.8 Změny polohy průsečíků fázové trajektorie  $\omega(t)$  s rovinou  $\omega_1 = 0$  (levá část obrázku) a  $\omega_2 = 0$  (pravá část obrázku) při zmenšujících se hodnotách parametru stratifikace  $S = 0,6$  (a),  $-0,65$  (b) [22].

Informace o míře vlivu ageostrofických efektů při změně parametru stratifikace  $S$  získáme pomocí spektrálních charakteristik kvazigeostrofických a výchozích pohybových rovnic. Při malých hodnotách  $S$  se v pů-

vodním systému realizuje režim se dvěma nízkými frekvencemi, blízkými k frekvenci kvazigeostrofického systému, v němž nedochází k vysokofrekvenčním oscilacím. Při kladných (záporných) hodnotách  $S$  je nízká frekvence výchozího (původního) systému nižší (vyšší) než kvazigeostrofická. V oblastech malých Rossbyho čísel získáme kvazigeostrofické řešení



Obr. 13.9 Frekvenční distribuce Fourierových koeficientů pro kvazigeostrofický triplet (silnější křivka) a „přesnou“ trajektorii pro  $S = -0,65$  [22].

výchozích rovnic vystředováním podle rychlé složky pohybu. Odtud zjistíme, že rozvoj podle malého parametru  $\omega$  a vystředování podle periody rychlých oscilací systému jsou ekvivalentní operace. S růstem modulu záporných hodnot parametru stratifikace  $S$  se mění fázový portrét: generují se nízkofrekvenční oscilace jako příznak (zárodek) chaotického chování trajektorií a dochází k narušení procedury vystředování. Pověsimně si průběhu frekvenční distribuce Fourierových harmonických pro kvazigeostrofickou trajektorii (silněji vytažená křivka) a odpovídající složky pohybu původního systému při  $S = -0,65$  (obr. 13.9). Vyzvedněme okolnost, že přesnost numerické integrace systému nenarušila platnost zákonů zachování (vždy je třeba volit kompromis mezi požadovanou přesností a časovou náročností). Systém byl integrován v časovém intervalu  $\langle 0, T \rangle$ ,  $T \sim 10^4$  a ve všech případech relativní chyba vypočtené hodnoty nepřevýšila  $10^{-8}$ . Ještě si řekněme, že při velkých hodnotách parametru stratifikace  $S$  (s přesností převyšující  $10^{-6}$ ), došlo v systému k jeho návratu do počátečního stavu a takové přesnosti bylo dosaženo pro  $T \sim 10^2$  [22].

Stručně shrňme fakta o dynamice globálních barotropních a baroklinních toků v geofyzikální hydrodynamice, vystavěné na pojmu Arnoldova zobecněného tělesa a jeho rozšíření na pohyby ve vnějších silových polích. Na

těchto základech získaná teorie systémů hydrodynamiky je založena na poznatku, že pohybové rovnice těžkého setrvačnicku v poli Coriolisových sil jsou modelem barotropního proudění tekutiny. Dynamika systémů mechaniky s pohybovými rovnicemi, majícími základní vlastnosti symetrie pohybových rovnic rotující homogenní a stratifikované tekutiny, je v jistém smyslu dynamikou globálních barotropních a baroklinních geofyzikálních toků. „Precesní pohyb“ barotropního setrvačnicku ve směru opačném ke směru jeho rotace, v aproximaci zachování projekce momentu hybnosti do směru vektoru rotace, je mechanickým preobrazem planetárních Rossbyho vln v aproximaci lagrangeovské invariance vertikální vorticity barotropní rotující tekutiny. Také by neměl uniknout naší pozornosti zjištěný přímý vztah mezi zachováním čtverce momentu hybnosti a Kelvinovým cirkulačním teorémem. Již tyto okolnosti činí aktuálním přístup k geofyzikální hydrodynamice postavený na mechanice tuhého tělesa a jeho zobecnění. Je to analogie platící mezi konečnědimenzionálními aproximacemi rovnic hydrodynamiky ideální nestlačitelné tekutiny a Eulerovými rovnicemi tuhého tělesa, přeformulovaná do teorému o ekvivalenci hydrodynamického tripletu a těchto rovnic. Ta má zásadní význam pro skladbu teorie tekutin, spočívající na grupovém formalismu. Tehdy jako závislé proměnné vystupují vertikální vorticity a složky termálního větru, tj. základní charakteristiky globálních geofyzikálních toků. Vnější parametrem je parametr stratifikace s výrazným vlivem na pohybový režim kvazigeostrofického tripletu. Také proto je účelné věnovat pozornost matematickým úlohám dynamiky stratifikované tekutiny, z nichž některé dosud nebyly uspokojivě vyřešeny (viz kapitola 13.11). Je však zřejmé, že právě nestabilita vertikální stratifikace tekutiny může vést na chaotizaci trajektorií v jejím fázovém prostoru. Otevřenou otázkou stále zůstává vliv nestabilní vertikální stratifikace na dynamiku globálních geofyzikálních toků. Je možné, že v této oblasti nové výsledky přinese stále vzrůstající úloha teorie dynamických systémů v geofyzikální hydrodynamice. Názorným příkladem je zde vytípaná pomalá varieta, „regulující“ fázové trajektorie neredukovaných rovnic hydrodynamiky.

## 13.6 Diferenciální formy

Vzhledem k tomu, že kalkul diferenciálních forem definovaných na eukleidovských prostorech (obecněji na diferencovatelných varietách) je již běžným prostředkem moderní matematické analýzy a jeho podrobný výklad je

standardní součástí dostupných pramenů (např. [25]), omezíme se na stručné shrnutí podstatných vlastností diferenciálních forem a základních operací s nimi.

Je-li funkce  $f$  spojitě diferencovatelná v oblasti  $A \subset \mathbb{R}^n$  a je-li dán bod  $\mathbf{a} \in A$ , pak zobrazení  $df_{\mathbf{a}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ , které každému vektoru  $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_n \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$  ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  je standardní báze prostoru  $\mathbb{R}^n$ ) přiřazuje číslo  $\text{grad}f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$ , nazýváme diferenciálem funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$ . Je tedy

$$df_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a})u_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})u_n.$$

Diferenciál  $df_{\mathbf{a}}$  se zapisuje obvykle ve tvaru

$$df_{\mathbf{a}} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a})dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})dx_n.$$

Zde je  $dx_j$  diferenciál  $j$ -té souřadnicové funkce  $x_j$ , kde  $j = 1, 2, \dots, n$ , tj. lineární funkce přiřazující vektoru  $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_n \mathbf{e}_n$  jeho  $j$ -tou souřadnici  $u_j$

$$dx_j(\mathbf{u}) = u_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Diferenciály  $dx_j$  budeme nazývat elementárními diferenciálními 1-formami.

Je-li dáno  $n$  skalárních funkcí  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , definovaných v nějaké množině  $D \subset \mathbb{R}^n$ , pak zobrazení

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n,$$

které každému bodu  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  a každému vektoru  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$  přiřazuje číslo

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= f_1(\mathbf{x})dx_1(\mathbf{u}) + f_2(\mathbf{x})dx_2(\mathbf{u}) + \dots + f_n(\mathbf{x})dx_n(\mathbf{u}) \\ &= f_1(\mathbf{x})u_1 + f_2(\mathbf{x})u_2 + \dots + f_n(\mathbf{x})u_n, \end{aligned}$$

budeme nazývat diferenciální 1-formou v množině  $D$ .

Nechť  $dx_i, dx_j$  jsou dvě elementární diferenciální 1-formy v  $\mathbb{R}^n$ . Jejich vnějším součinem nazveme zobrazení

$$dx_i \wedge dx_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1,$$

které každé dvojici vektorů  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  přiřazuje reálné číslo





$$\omega(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n f_{i_1 i_2 \dots i_k}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k),$$

nazýváme diferenciální  $k$ -formou v množině  $H$ . Funkce  $f_{i_1 i_2 \dots i_k}$  nazýváme koeficienty diferenciální  $k$ -formy  $\omega$ .

Nechť jsou dány diferenciální  $r$ -forma

$$\omega = \sum \omega_{i_1 i_2 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

a diferenciální  $s$ -forma

$$\eta = \sum \omega_{j_1 j_2 \dots j_s} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}.$$

Vnější součinem diferenciální  $r$ -formy  $\omega$  a diferenciální  $s$ -formy  $\eta$  nazýváme diferenciální  $(r+s)$ -formu  $\omega \wedge \eta$ , definovanou vztahem

$$\omega \wedge \eta = \sum \omega_{i_1 i_2 \dots i_r} \eta_{j_1 j_2 \dots j_s} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s},$$

kde se sčítá přes všechny hodnoty indexů  $i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s$ .

Definujme dále vnější derivace diferenciální  $k$ -formy. Nechť  $\omega$  je diferenciální  $k$ -forma třídy  $C^1$  v nějaké oblasti  $H \subset \mathbb{R}^n$ . Vnější derivací diferenciální  $k$ -formy  $\omega$  nazýváme diferenciální  $(k+1)$ -formu  $d\omega$ , definovanou předpisem

$$d\omega = \sum d\omega_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

kde  $d\omega_{i_1 i_2 \dots i_k}$  je diferenciál funkce (koeficientu)  $\omega_{i_1 i_2 \dots i_k}$ .

Vnější derivací diferenciální 0-formy  $f$ , tj. spojitě diferencovatelné funkce  $f$ , je její diferenciál

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Vnější derivací diferenciální 1-formy

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$$

je diferenciální 2-forma

$$d\omega = \sum_{i=1}^n df_i \wedge dx_i = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_i \right] = \sum_{i < j} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j.$$

Speciálně pro  $n = 3$  a  $\omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$  je

$$d\omega = \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Vnější derivace diferenciální  $(n - 1)$ -formy

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

v prostoru  $\mathbb{R}^n$  je diferenciální  $n$ -forma

$$d\omega = \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right] dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Speciálně pro  $n = 3$  a  $\omega = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$  je

$$d\omega = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Označíme-li  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  a

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z},$$

můžeme diferenciální 2-formu  $d\omega$  psát ve tvaru

$$d\omega = d(f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy) = \operatorname{div} \mathbf{f} dx \wedge dy \wedge dz.$$

Obecně pro vnější derivaci diferenciální  $(n - 1)$ -formy

$$\omega = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}_{n-1} = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} f_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

dostáváme

$$d\omega = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Označíme-li

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

pak pro vnější derivaci diferenciální  $(n - 1)$ -formy  $d\omega$  platí

$$d\omega = \operatorname{div} \mathbf{f} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = \operatorname{div} \mathbf{f} dV_n,$$

kde  $dV_n$  je element  $n$ -dimenzionálního plošného obsahu v  $\mathbb{R}^n$ , tj.

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$$

Nechť  $\omega$  je diferenciální  $k$ -forma třídy  $C^1$  na nějaké oblasti  $H \subset \mathbb{R}^n$ . Říkáme, že diferenciální  $k$ -forma  $\omega$  je uzavřená právě tehdy, když  $d\omega = 0$ .

### 13.7 Teorém Noetherové

Dříve než vyslovíme tento teorém, připomeňme si pojmy vložená varieta, tečný bandl a derivace zobrazení [13].

Říkáme, že  $M$  je vložená do Eukleidova prostoru  $E^n$  podvarieta dimenze  $k$ , jestliže v okolí  $U$  každého bodu  $\mathbf{x} \in M$  existuje  $n - k$  funkcí  $f_1: U \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $f_2: U \rightarrow \mathbb{R}^1$ , ...,  $f_{n-k}: U \rightarrow \mathbb{R}^1$  takových, že průnik okolí  $U$  a  $M$  je zadán rovnicemi  $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_{n-k} = 0$  a funkce (vektory)  $\operatorname{grad} f_1, \operatorname{grad} f_2, \dots, \operatorname{grad} f_{n-k}$  v  $\mathbf{x}$  jsou lineárně nezávislé. Je snadné zavést na  $M$  strukturu variety, tj. souřadnice v okolí  $\mathbf{x}$ . Lze dokázat, že každou varietu lze vložit do Eukleidova prostoru.

Je-li  $M$  vložená do  $E^n$   $k$ -dimenzionální varieta, pak v každém bodě  $\mathbf{x}$  má  $M$   $k$ -dimenzionální tečný prostor  $TM_{\mathbf{x}}$ . Jmenovitě,  $TM_{\mathbf{x}}$  je ortogonální doplněk k  $\{\operatorname{grad} f_1, \operatorname{grad} f_2, \dots, \operatorname{grad} f_{n-k}\}$ . Sjednocení tečných prostorů k varietě  $M$  v různých bodech  $\bigcup_{\mathbf{x} \in M} TM_{\mathbf{x}}$  má přirozenou strukturu diferenciální variety,

jejíž dimenze je dvojnásobkem dimenze  $M$ . Tuto varietu nazvěme tečným bandlem variety  $M$  a označíme  $TM$ . Bod  $TM$  je vektor  $\xi$  tečný k  $M$  v některém bodě  $\mathbf{x}$ . Lokální souřadnice na  $TM$  zavádíme následujícím způsobem. Nechť  $q_1, q_2, \dots, q_n$  jsou lokální souřadnice na varietě  $M$  a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  složky tečného vektoru  $\xi$  v tomto souřadnicovém systému. Tehdy  $2n$  čísel  $(q_1, q_2, \dots, q_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  zadává na  $TM$  lokální souřadnicový systém.

Nyní se zastavíme u derivace zobrazení. Nechť  $f: M \rightarrow N$  je zobrazení variety  $M$  do variety  $N$ . Zobrazení  $f$  nazvěme diferencovatelným, jestliže v lokálních souřadnicích na  $M$  a na  $N$  je zadáno diferencovatelnými funkcemi. Derivací diferencovatelného zobrazení nazvěme lineární zobrazení tečných prostorů  $f_{*\mathbf{x}}: TM_{\mathbf{x}} \rightarrow TN_{f(\mathbf{x})}$  zadané následovně. Nechť  $\mathbf{v} \in TM_{\mathbf{x}}$ . Uvažme křivku  $\varphi: \mathbb{R}^1 \rightarrow M$ ,  $\varphi(0) = \mathbf{x}$  s vektorem rychlosti  $d\varphi/dt|_{t=0} = \mathbf{v}$ .

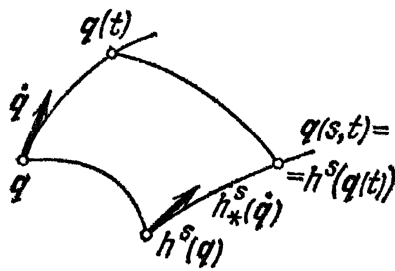
Tehdy  $f_{*\mathbf{x}}\mathbf{v}$  je vektor rychlosti křivky  $f \circ \varphi: \mathbb{R}^1 \rightarrow N$ ,  $f_{*\mathbf{x}}\mathbf{v} =$

$= d/dt|_{t=0} f(\boldsymbol{\varphi}(t))$ . Vektor  $f_{*x}\mathbf{v}$  nezávisí na křivce  $\boldsymbol{\varphi}$ , ale jen na vektoru  $\mathbf{v}$  a zobrazení  $f_{*x}: TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$  je lineární. Ještě podotkněme, že  $f$  je diferencovatelné zobrazení.

Před formulací teoremu podotkněme, že různé zákony zachování (hybnosti, momentu hybnosti atd.) jsou dílčími případy jednoho obecného teoremu, podle kterého každé jednoparametrické grupě difeomorfismů konfigurační variety lagrangeovského systému, zachovávajících Lagrangeovu funkci, odpovídá první integrál pohybových rovnic.

Nechť je  $M$  hladká varieta,  $L: TM \rightarrow \mathbb{R}^1$  hladká číselná funkce na jejím tečném bandlu. Nechť  $h: M \rightarrow M$  je hladké zobrazení. Definujme, že Lagrangeho systém  $\{M, L\}$  připouští zobrazení  $h$ , jestliže pro libovolný tečný vektor  $\mathbf{v} \in TM$  platí  $L(h_*\mathbf{v}) = L(\mathbf{v})$ .

Uveďme jednoduchý příklad. Nechť  $M = \{(x_1, x_2, x_3)\}$ ,  $L = (m/2)(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U(x_2, x_3)$ . Systém připouští (dovoluje) posuv  $h: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1 + s, x_2, x_3)$  podél osy  $x_1$  a nepřipouští obecně posuv podél osy  $x_2$ .



Obr. 13.10 K teóremu Neetherové [14].

**Teorém Noetherové.** Jestliže systém  $\{M, L\}$  připouští jednoznačnou grupu difeomorfismů  $h^s: M \rightarrow M$ ,  $s \in \mathbb{R}^1$ ,  $h^0 = E$ , potom k  $L$  příslušející systém Lagrangeových rovnic má první integrál  $I: TM \rightarrow \mathbb{R}^1$ . V lokálních souřadnicích  $\mathbf{q}$  na  $M$  integrál  $I$  zapisujeme ve tvaru

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{dh^s(\mathbf{q})}{ds} \Big|_{s=0}.$$

Proveďme důkaz tohoto tvrzení postupem uvedeným v [14]. Zpočátku budiž  $M = \mathbb{R}^n$  souřadnicový prostor<sup>\*)</sup>. Nechť  $\varphi: \mathbb{R}^1 \rightarrow M$ ,  $\mathbf{q} = \boldsymbol{\varphi}(t)$  je řešení

<sup>\*)</sup> Uvažme direktní součin  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3$  osy  $t$  na trojdimenzionální lineární prostor  $\mathbb{R}^3$  s pevnou euklidovskou strukturou, tj. s pozitivně definitní bilineární formou - skalárním součinem. Takový prostor nazvěme souřadnicovým prostorem. V literatuře se můžeme setkat i s termínem souřadnicový galileovský prostor.

Lagrangeovy rovnice. Protože  $h$  zachovává  $L$ , posuv řešení  $h^s \circ \varphi : \mathbb{R}^1 \rightarrow M$  pro libovolné  $s$  rovněž vyhovuje Lagrangeově rovnici (obrácené tvrzení neplatí). Necht'  $\Phi : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{q} = \Phi(s, t) = h^s(\varphi(t))$  (obr. 13.10). Označme si derivaci podle  $t$  tečkou a derivaci podle  $s$  čárkou. Za uvedených podmínek platí

$$\frac{\partial L(\Phi, \dot{\Phi})}{\partial s} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \Phi' + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\Phi}' = 0,$$

kde parciální derivace  $L$  vztahujeme na bod  $\mathbf{q} = \Phi(s, t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\Phi}(s, t)$ . Dále si uvědomme, že při libovolné pevné hodnotě  $s$  zobrazení  $\Phi|_{s=\text{konst}} : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  vyhovuje Lagrangeově rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\Phi(s, t), \dot{\Phi}(s, t)) \right] = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\Phi(s, t), \dot{\Phi}(s, t)).$$

Označme  $\mathbf{F}(s, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\Phi(s, t), \dot{\Phi}(s, t))$  a dosadíme do poslední rovnice  $\partial \mathbf{F} / \partial t$  místo  $\partial L / \partial \mathbf{q}$ . Zapišeme-li  $\dot{\mathbf{q}}'$  ve tvaru  $(d/dt)\mathbf{q}'$ , nalezneme

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \mathbf{q}' + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left( \frac{d}{dt} \mathbf{q}' \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \mathbf{q}' \right) = \frac{dI}{dt} = 0,$$

což jsme chtěli dokázat.

### 13.8 Simplektická struktura na orbitách koadjungované reprezentace a levoinvariantní metriky

Na každé orbitě koadjungované reprezentace grupy v prostoru duálním k algebře máme přirozenou simplektickou strukturu a orbity tak mají vždy sudou dimenzi.

Simplektická struktura na orbitách koadjungované reprezentace je určena následujícím způsobem. Necht' je  $\mathbf{x}$  bod z prostoru duálního k algebře a  $\xi$  tečný vektor orbity v tomto bodě. Protože je  $\mathfrak{g}^*$  lineární prostor, můžeme nahlížet na vektor  $\xi$  jako na vektor rychlosti pohybu bodu  $\mathbf{x}$  v koadjungované reprezentaci jednoparametrické grupy  $\exp(\mathbf{a}t)$  s vektorem rychlosti  $\mathbf{a} \in \mathfrak{g}$ . Jinak řečeno, každý tečný vektor  $\xi$  v bodě  $\mathbf{x}$  orbity v koadjungované reprezentaci grupy je dán vztahem

$$\xi = \{\mathbf{a}, \mathbf{x}\}, \quad \mathbf{a} \in \mathfrak{g}, \mathbf{x} \in \mathfrak{g}^*.$$

Nyní jsme již připraveni určit symplektickou 2-formu  $\Omega$  na dvojici vektorů  $\xi_1$  a  $\xi_2$ , tečných k orbitě v bodě  $\mathbf{x}$ . Především vyjádříme  $\xi_1$  a  $\xi_2$  pomocí některých prvků algebry  $\mathbf{a}_1$  a  $\mathbf{a}_2$  podle předchozího zápisu a poté sestavíme skalár ze dvou prvků algebry a jednoho prvku k ní duálního prostoru ve tvaru

$$\Omega(\xi_1, \xi_2) = (\mathbf{x}, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]), \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{g}^*, \mathbf{a}_i \in \mathfrak{g}.$$

Můžeme se přesvědčit, že bilineární forma  $\Omega$  je dána korektně, tj. že její hodnota nezávisí na volbě  $\mathbf{a}_i$ , forma  $\Omega$  je antisymetrická a udává diferenciální 2-formu na orbitě a dále, že forma  $\Omega$  je nedegenerovaná a uzavřená. Formou  $\Omega$  tedy je zadána symplektická struktura na orbitě koadjungované reprezentace.

Zbývá věnovat pozornost levoinvariantním metrikám. Riemannova metrika na Lieově grupě  $G$  se nazývá levoinvariantní, jestliže tato metrika se zachovává při všech levých translacích  $L_g$ , tj. jestliže převádí derivace levé translace každý vektor na vektor téže délky.

Levoinvariantní Riemannovu metriku stačí zadat v jednom bodě grupy, např. v její jednotce. Tehdy do ostatních bodů grupy lze metriku převést levými translacemi. Dodejme, že levoinvariantních Riemannových metrik na grupě je právě tolik, kolik je na algebře grupy eukleidovských struktur. Tato struktura na algebře je určena symetrickým pozitivně definitním operátorem působícím z algebry do prostoru k ní duálního. Takže, necht'  $\mathbf{A}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$  je symetrický pozitivně definitní operátor:

$$(\mathbf{A}\xi, \eta) = (\mathbf{A}\eta, \xi) \text{ pro všechna } \xi, \eta \text{ z } \mathfrak{g}.$$

(Požadavek pozitivnosti symetrického operátoru  $\mathbf{A}$  není podstatný, nicméně v mechanických aplikacích je kvadratická forma  $(\mathbf{A}\xi, \xi)$  pozitivně definitní). Definujme symetrický operátor  $\mathbf{A}_g: TG_g \rightarrow T^*G_g$  levou translací

$$\mathbf{A}_g \xi = L_{g^{-1}}^* \mathbf{A} L_{g^{-1}*} \xi.$$

Dospějeme tak ke komutativnímu diagramu lineárních operátorů (obr. 13.1). Operátorem  $\mathbf{A}_g$  určený skalární součin označme lomenými závorkami:

$$\langle \xi, \eta \rangle_g = (\mathbf{A}_g \xi, \eta) = \langle \eta, \xi \rangle_g.$$

Tento skalární součin zadává na grupě  $G$  Riemannovu metriku, invariantní vůči levým translacím.

## 13.9 Liouvilleův teorém a Hamiltonovy systémy

V předcházejících pojednáních o systémech hydrodynamického typu jsme se s Hamiltonovými systémy setkali při zavádění symetrizovaných nelineárních systémů (kap. 3). Setkání však bylo jen letmé, bez podrobnějšího výkladu. Proto se k těmto systémům ještě vrátíme, tentokrát prostředky teorie hladkých variet<sup>\*)</sup>. Je to Liouvilleův teorém o invariantní míře a právě jedna z jeho možných aplikací, která nás přivede k Hamiltonovým systémům. Dodejme, že pro mnohé dynamické systémy na hladkých varietách lze explicitně zadat hladkou invariantní míru a činíme tak právě pomocí zmíněného teorému, o němž nyní pojednáme [27].

Budiž  $M$   $m$ -dimenzionální kompaktní uzavřená orientovaná varieta třídy  $C^\infty$  (symbol  $C^\infty$  zpravidla označuje kategorii všech hladkých variet a jejich hladkých zobrazení) a  $\mathbf{X}$  vektorové pole třídy  $C^\infty$  na  $M$ . V lokálních souřadnicích  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  má vektorové pole  $\mathbf{X}$  tvar  $\mathbf{X}(x_1, x_2, \dots, x_m) = (X_1(x_1, x_2, \dots, x_m), X_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, X_m(x_1, x_2, \dots, x_m))$ , kde  $X_k(x_1, x_2, \dots, x_m) \in C^\infty(M)$ ,  $1 \leq k \leq m$ . Uvažme na  $M$  systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ \frac{dX_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ &\vdots \\ \frac{dX_m}{dt} &= X_m(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Na tento systém lze aplikovat teorém o existenci a jednoznačnosti řešení a proto můžeme zavést jednoparametrickou grupu  $\{T^t\}$  difeomorfismů třídy  $C^\infty$  variety  $M$ . Samotné zobrazení  $T^t$  je posuvem (shift), převádějícím v čase  $t$  bod  $\mathbf{x}$  podél trajektorie řešení systému.

Budiž  $\omega$  diferenciální  $m$ -forma třídy  $C^\infty$  na  $M$ . Tato forma definuje spojitý lineární funkcionál na prostoru  $C(M)$ , jenž je prostorem spojitých lineárních diferencovatelných reálných funkcí na hladké varietě  $M$ . Platí

<sup>\*)</sup> V dynamice atmosféry se můžeme setkat s Hamiltonovými systémy např. tehdy, hledáme-li Ljapunovy exponenty atraktorů generovaných matematickými modely všeobecné cirkulace atmosféry při jejich konečnědimenzionálních aproximacích. Ukazuje se [26], že za jistých smysluplných podmínek daných dynamikou procesu, model atmosférických pohybů při přechodu na hamiltonovský tvar vykazuje pozoruhodnou vlastnost párové symetrie Ljapunovových exponentů. Považujeme ji za dostatečně obecnou vlastnost, charakterizující stochastické stavy atmosférických režimů. Při velké dimenzi atraktorů bude jejich dynamika kvazihamiltonovská a dimenze bude blízká dvojnásobku počtu Ljapunovových exponentů. Takový aproximační vztah byl potvrzen při výpočtu dimenzí atraktorů dobrých modelů barotropní atmosféry [26].

$$\omega(f) = \int_M f(\mathbf{x})\omega(d\mathbf{x}), \quad f \in C(M).$$

Nechť  $\omega(f) > 0$ , je-li  $f > 0$ . Každá taková forma zadává na  $M$  míru, položíme-li  $\mu_\omega(f) = \omega(f)$ .

Zvolme libovolný, avšak pevný atlas na  $M$ , tvořený mapami  $(U_i, \varphi_i)$  a požadujeme, aby byl jakobián  $\det|\varphi_i \circ \varphi_j|$  v libovolném bodě  $\mathbf{x} \in U_i \cap U_j$  kladný. To lze vždy učinit, neboť  $M$  je orientovanou varietou. Tehdy může být forma  $\omega$  v každém bodě oblasti  $U_i$  zadána nezápornou hustotou  $p(\mathbf{x})$ , funkcí třídy  $C^\infty$ . Je zřejmé, že pro libovolnou formu  $\omega$  bude forma  $\omega_t$ ,  $\omega_t(f) = \omega(f(T'\mathbf{x}))$  rovněž kladná a obě míry jsou ekvivalentní.

Položme si otázku: Kdy existuje invariantní forma, tj. taková forma  $\omega$ , pro niž platí  $\omega_t = \omega$  pro všechna  $t$ ? Pokud taková forma existuje,  $\mu_\omega$  bude invariantní mírou grupy  $\{T^t\}$ .

Předpokládejme, že forma  $\omega$  je zadána hustotou  $p(\mathbf{x})$ , takže diferenciál míry  $\mu = \mu_\omega$  má v lokálních souřadnicích tvar  $d\mu = p(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m$ . Poté platí:

Liouvilleův teorém o invariantní míře [27]. Nutnou a postačující podmínkou invariance míry  $\mu$  (konečné či  $\sigma$ -konečné) vzhledem k  $\{T^t\}$  je splnění rovnosti

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} (pX_k) = 0.$$

Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt např. v [27]. Liouvilleův teorém má lokální charakter; vektorové pole  $\mathbf{X}$  je spojitě a o invarianci míry  $\mu$  stačí se přesvědčit toliko v okolí libovolného bodu.

Poznámka 20:  $M$  si lze představit ve tvaru sjednocení spočetně mnoha podmnožin konečné míry. Poté je  $M$  prostorem s  $\sigma$ -konečnou mírou. Prostor s mírou se obvykle značí  $(M, \mathfrak{S}, \mu)$ . Je to prostor  $M$  s mírou  $\mu$  na  $\sigma$ -algebře  $\mathfrak{S}$ .  $\sigma$ -algebrou nazýváme soubor  $S$  podmnožin prostoru  $M$  s vlastnostmi: 1. Pro libovolnou množinu  $A \in S$  na  $S$  platí, že i její doplněk  $A' = M \setminus A$  je z  $S$ ; 2. Pro libovolný spočetný systém  $\{A_n\}$  množin z  $S$  sjednocení  $\cup A_n$  a průnik  $\cap A_n$  množin  $A_n$  rovněž jsou z  $A$ .

Přístupme k jedné z možných aplikací zmíněného teorému, která nás přivede k Hamiltonovým systémům [27].

Budiž dány  $m$ -dimenzionální varieta  $Q$  třídy  $C^\infty$  a  $T^*Q$  svazek diferenciálních 1-forem na  $Q$ . Zvolme souřadnicové okolí  $U$  se souřadnicemi  $q^1, q^2, \dots, q^m$ . Tehdy každá 1-forma je na  $U$  zadána svými  $m$  složkami  $p_1, p_2, \dots, p_m$ . Nedegenerovaná diferenciální 2-forma



$$\boldsymbol{\omega} = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = \sum_{i=1}^m d p_i \wedge d q^i$$

vytváří na  $T^*Q$  symplektickou strukturu. K libovolné hladké funkci  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  na  $T^*Q$  sestavme systém diferenciálních rovnic na  $T^*Q$  v proměnných  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  ve tvaru

$$\frac{d q^i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{d p_i}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial q^i},$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Funkce  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  je Hamiltonovou funkcí (hamiltoniánem) a uvedený systém diferenciálních rovnic Hamiltonovým systémem (též soustavou Hamiltonových kanonických rovnic). Nezávisí-li  $H$  explicitně na čase  $t$ , tj. když  $\partial H / \partial t = 0$ , je  $H$  rovno úhrnné energii.

Z tvaru tohoto systému a Liouvilleova teorému bezprostředně dostáváme, že je funkce  $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv \text{konst}$  hustotou invariantní míry pro tok  $\{T^t\}$  systému Hamiltonových rovnic. Tato míra není konečná. Hamiltonova funkce  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  je prvním integrálem, tj.

$$\frac{d H}{d t} = -\sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0.$$

Množina  $\Gamma = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) : H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \text{konst}\}$  je v mnoha případech kompaktní a Liouvilleova míra indukuje na  $\Gamma$  konečnou invariantní míru. Je tomu tak např. v dynamice geodetických toků na Riemannových varietách [27]. Je známo, že Hamiltonovy systémy lze převést na geodetické toky na  $m$ -dimenzionální varietě  $Q$  třídy  $C^\infty$  při Riemannově metrice

$$d s^2 = (h - V(\mathbf{q})) \sum_{i,j} a_{ij}(\mathbf{q}) v^i v^j / 2 - V(q^1, q^2, \dots, q^m).$$

Zde je  $V$  potenciální energie,  $T = (1/2) \sum_{i,j} a_{ij} v^i v^j$  kinetická energie,  $h = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \text{konst}$ . Matice  $\mathbf{A}$  s prvky  $a_{ij}$  je pozitivně definitní.

### 13.10 Hamiltonův formalismus na Lieových grupách

Připomeňme si, že tuhým tělesem v mechanice rozumíme soubor konečný (či nekonečný) hmotných bodů, jejichž vzájemné vzdálenosti se nemění.

Polohu bodů tuhého tělesa jednoznačně určuje repér pevně spojený s tělesem. Nadále budeme uvažovat volné tuhé těleso. Jeho konfigurační prostor  $M$  ztotožníme se souborem všech ortogonálních repérů  $E = \{\mathbf{a}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3\}$  v  $\mathbb{R}^3$ , kde  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  a uspořádaná trojice vektorů  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  je ortonormální. Proto můžeme psát  $M = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ , kde  $SO(3)$  je grupa rotací trojdimenzionálního Eukleidova prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Zvolme si právě jeden takový repér  $E_0$ . Tehdy každý repér  $E \in M$  jednoznačně určuje pohyb  $g(E): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , převádějící  $E_0$  do  $E$ . Tím je dána možnost ztotožnit  $M$  s Lieovou grupou  $G(3)$  všech pohybů v prostoru  $\mathbb{R}^3$ .

Nechť  $E \in M$ . Pak tečný prostor  $T_E(M) = T_{\mathbf{a}}(\mathbb{R}^3) \oplus (SO(3))$ , kde  $E = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)$  a každý vektor  $\boldsymbol{\xi} \in T_E(M)$  jednoznačně zapíšeme ve tvaru  $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega})$ ,  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{a}}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\boldsymbol{\omega} \in T_{\mathbf{a}}(SO(3))$ . Podotkněme, že  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$  značí rotaci kolem osy vektoru  $\boldsymbol{\omega}$  v kladném směru s úhlovou rychlostí  $|\boldsymbol{\omega}|$ . Stav tuhého tělesa tedy je popsán vektorem rychlosti jeho translačního pohybu a vektorem rychlosti jeho rotačního pohybu.

Je vhodné umístit repér  $E_0$  do bodu, v němž si myslíme soustředěnou veškerou jeho hmotnost, tedy do jeho těžiště. Geometricky je tento bod určen požadavkem, aby v metrice  $E$ , zadané kinetickou energií tuhého tělesa, tečné prostory  $T_{\mathbf{a}}(\mathbb{R}^3)$  a  $T_{\mathbf{a}}(SO(3))$  byly ortogonální pro všechna  $E \in G(3)$ . Poté je kinetická energie  $E_{\text{kin}}$  tuhého tělesa dána součtem kinetické energie jeho translačního a rotačního pohybu. Prvá je rovna  $m \sum_{i=1}^3 v_i^2 / 2$ , kde je  $m$  hmotnost tělesa,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  a druhou zadává jistá kvadratická forma v neurčitých  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , kde  $\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{\varepsilon}_i \omega_i$ . Z důvodů zřejmé symetrie tato forma nezávisí na  $E$ . Proto lze repér  $E_0$  svázat s tělesem v jeho těžišti tak, aby tato kvadratická forma měla diagonální tvar  $\sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2 / 2$ . Stručně říkáme, že je převedena kvadratická forma v součet čtverců neurčitých. Konstanty  $I_i$  se nazývají hlavní momenty setrvačnosti tuhého tělesa. Úhrnem tak dostáváme, že

$$E_{\text{kin}}(E) = m \sum_{i=1}^3 v_i^2 / 2 + \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2 / 2.$$

Obrátme zde pozornost na to, že tento zápis pro  $E_{\text{kin}}(E)$  není obyčejným vyjádřením metriky v lokálních souřadnicích. Zavedli jsme totiž souřadnicový systém  $(v_i, \omega_i)$  v  $T_{E_0}(M)$  a poté jsme ho převedli pohybem  $g(E)$  do

$T_E(M)$ . Takový způsob zavedení souřadnic není spojen s výběrem lokálních souřadnic na  $M$  a zejména proto má výraz pro  $E_{\text{kin}}$  konstantní koeficienty. Lze dokázat, že při obyčejném způsobu zápisu metriky nelze docílit výběrem lokálních souřadnic konstantních koeficientů pro veličinu  $E_{\text{kin}}$ .

Smysl provedené procedury objasňuje teorie Lieových grup [28]. Necht' je  $G$  Lieova grupa,  $e \in G$  její jednotka,  $L_g: G \rightarrow G$  levá translace. Je-li  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  báze v  $T_e(G)$ , lze tuto bázi převést do libovolného prostoru  $T_g(G)$  pomocí izomorfismu  $(dL_g)_e: T_e(G) \rightarrow T_g(G)$  a tam získat bázi  $\mathbf{e}_i^g = (dL_g)_e(\mathbf{e}_i)$ . Vektorová pole  $\mathbf{X}_i$  taková, že  $\mathbf{X}_{i|g} = \mathbf{e}_i^g$  jsou zřejmě levoinvariantní, tj.  $L_g(\mathbf{X}_i) = \mathbf{X}_i$  pro všechna  $g \in G$  a vytvářejí bázi nad  $\mathbb{R}^1$  prostoru  $L = L(G)$  všech levoinvariantních polí na  $G$ . Jestliže  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in L$ , zřejmě  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  (Poissonova závorka) je z  $L$  a  $L$  je Lieovou algebrou  $\mathcal{L}$  grupy  $G$ . Tuto algebru nazýváme algebrou přidruženou ke grupě  $G$ . Necht'  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r)$  je báze v algebře přidružené ke grupě  $G$ . Necht'  $c_{ij}^k, k = 1, 2, \dots, r$  jsou souřadnice vektoru  $[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j]$  v této bázi, tj.  $[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j] = \sum_{k=1}^r c_{ij}^k \mathbf{a}_k$ . Potom čísla  $c_{ij}^k, i, j, k = 1, 2, \dots, r$ , nazýváme strukturními konstantami grupy  $G$  (algebry  $\mathcal{L}$ ) při bázi  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r)$ . Obrátme nyní pozornost na bázi  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n)$  v prostoru  $T_e^*(G)$  duální k  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  a necht'  $\mathbf{e}_i^g = [(dL_g)_e]^*(\mathbf{e}_i)$ . Tehdy formy  $\boldsymbol{\omega}_i \in \Lambda^1(G)$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{i|g} = \mathbf{e}_i^g$  jsou levoinvariantní a tvoří bázi v  $L^*$ , duální k bázi  $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$  v  $L$ . K zápisu  $\boldsymbol{\omega}_i \in \Lambda^1(G)$  poznamenejme: Jestliže  $M$  je  $C^\infty$  varieta,  $F(M)$  okruh hladkých funkcí na  $M$ ,  $D(M)$  značí  $F(M)$  – modul vektorových polí na  $M$ ,  $\Lambda^k(M)$  ( $0 \leq k \leq n = \dim M$ ), je  $F(M)$  modul diferenciálních  $k$ -forem na  $M$  ( $\Lambda^0(M) = F(M)$ ),  $\Lambda(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(M)$ . Po této odbočce podotkněme:  $\mathbf{X}_i$  (a odpovídající  $\boldsymbol{\omega}_i$ ) tvoří  $F(G)$  bázi na  $D(G)$  (odpovídající bázi v  $\Lambda^1(G)$ ) a každé vektorové pole (odpovídající 1-formu) na  $G$  lze zapsat ve tvaru  $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{X}_i$  stejně tak  $\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{\omega}_i$ , kde  $\alpha_i \in F(G)$ . Jmenovitě, každou metriku  $E$  na  $G$  lze zapsat ve tvaru

$$E(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i,j=1}^n \mu_{ij} \alpha_i \beta_j,$$

kde  $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{X}_i$ ,  $\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{X}_i$ ,  $\mu_{ij} = \mu_{ji} \in F(G)$ . Je-li metrika  $E$  levo-invariantní, pak  $\mu_{ij}$  jsou konstanty. Protože je  $E$  levoinvariantní, hamiltonián  $H$  tuhého tělesa je rovněž levoinvariantní. Jsou-li  $(p_i, v_i)$  souřadnice v  $T^*(M)$ , duální k  $(v_i, \omega_i)$ , bude

$$H = \sum_{i=1}^3 (p_i^2 / 2m + v_i^2 / 2I_i).$$

Můžeme tedy říci, že teorie pohybu tuhého tělesa nás přivádí k poznatku o důležitosti a nezbytnosti studovat levoinvariantní hamiltonovské systémy na Lieových grupách.

Teorie levoinvariantních hamiltonovských systémů na Lieově grupě  $G$  se podstatně zjednoduší, budeme-li uvažovat jen levoinvariantní část Hamiltonova formalismu na  $T^*(G)$ . Ve svých důsledcích to vede k tomu, že grupa  $G$  je grupou (neskrytých) symetrií levoinvariantního hamiltoniánu  $H$  na  $T^*(G)$ .

Věnujeme-li pozornost levoinvariantnímu Hamiltonovu formalismu na  $T^*(G)$  značí to, že budeme pracovat toliko s funkcemi, formami, poli atp. na  $T^*(G)$ , invariantními vzhledem k difeomorfismům  $L_g$  pro všechna  $g \in G$ .

Každé levoinvariantní funkci  $\varphi$  na  $T^*(G)$  lze přisoudit funkci  $L(\varphi) = \varphi|_{T_e^*(G)}$  na lineárním prostoru  $T_e^*(G)$ , který lze přirozeně ztotožnit s  $L^*$ ,  $L$  je izomorfismus okruhu hladkých levoinvariantních funkcí na  $T^*(G)$  a  $F(L^*)$ . Jsou-li  $\varphi \in F(T^*(G))$  a  $\mathbf{X} \in D(T^*(G))$  levoinvariantní, rovněž funkce  $\mathbf{X}(\varphi)$  bude levoinvariantní. Odtud dostáváme, že pole  $\mathbf{X}^L \in D(L^*)$  je korektně definováno rovností  $\mathbf{X}^L(\Psi) = L(\mathbf{X}(L^{-1}(\Psi)))$ ,  $\Psi \in F(L^*)$ .

Dříve než se vrátíme k tuhému tělesu, zakončíme krátkou exkurzi po levoinvariantní teorii výrokem, že je-li  $H \in F(T^*(G))$  levoinvariantní, tuto vlastnost má rovněž pole  $\mathbf{X}_H$ . Je tedy definováno pole  $\mathbf{X}_H^L$  a  $\mathbf{R}^1$  lineární zobrazení  $\Gamma_L: F(L^*) \rightarrow D(L^*)$ ,  $\Gamma_L(\Psi) = \mathbf{X}_{L^{-1}(\Psi)}^L$ . Naším úkolem nyní je uvést vztah pro  $\Gamma_L$ . Především si uvědomme, že  $[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = \sum c_{ij}^k \mathbf{X}_k$ . Dále je třeba vědět, že pokud  $\pi_i$  tvoří systém souřadnic na  $L$ , bude

$$\mathbf{X}_i^L = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n c_{ij}^k \pi_k \right) \frac{\partial}{\partial \pi_j}.$$

Tedy dostáváme

$$\Gamma_L(f) = \mathbf{X}_H^L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \pi_i} \left( \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n c_{ij}^k \pi_k \right) \frac{\partial}{\partial \pi_j} \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \pi_i} c_{ij}^k \pi_k \right) \frac{\partial}{\partial \pi_j}.$$

V předešlých úvahách jsme za bázi v  $T_e(G(3)) = T_{E_0}(M) = T_{a_0}(\mathbb{R}^3) \oplus T_e(SO(3))$  zvolili vektory  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  ve směrech os setrvačnosti uvažovaného tělesa (báze v  $T_{a_0}(\mathbb{R}^3)$ ) a vektory  $\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6$  jednotkových rotací podél os  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  (báze v  $T_e(SO(3))$ ). Tehdy bude

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] &= [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+3}] = 0, \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad [\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5] = \mathbf{e}_6, \\ [\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6] &= \mathbf{e}_4, \quad [\mathbf{e}_6, \mathbf{e}_4] = \mathbf{e}_5, \quad [\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_3, \quad [\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3] = -\mathbf{e}_2, \\ [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] &= -\mathbf{e}_3, \quad [\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1, \quad [\mathbf{e}_6, \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_2, \quad [\mathbf{e}_6, \mathbf{e}_2] = -\mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Po aplikaci zápisu pro  $\mathbf{X}_H^L$  na hamiltonián

$$H = \sum_{i=1}^3 (p_i^2 / 2m + v_i^2 / 2I_i)$$

s přihlédnutím k hodnotám strukturních konstant, daných výše napsanými výrazy, máme

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_H^L &= \left( \frac{v_3 p_2}{I_3} - \frac{v_2 p_3}{I_2} \right) \frac{\partial}{\partial p_1} + \left( \frac{v_1 p_3}{I_1} - \frac{v_3 p_1}{I_3} \right) \frac{\partial}{\partial p_2} + \left( \frac{v_2 p_1}{I_2} - \frac{v_1 p_2}{I_1} \right) \frac{\partial}{\partial p_3} \\ &+ v_3 v_2 \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) \frac{\partial}{\partial v_1} + v_1 v_3 \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3} \right) \frac{\partial}{\partial v_2} + v_2 v_1 \left( \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) \frac{\partial}{\partial v_3}. \end{aligned}$$

Levoinvariantní Hamiltonův systém pro tuhé těleso tak má tvar

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \frac{v_3 p_2}{I_3} - \frac{v_2 p_3}{I_2}, \quad \dot{p}_2 = \frac{v_1 p_3}{I_1} - \frac{v_3 p_1}{I_3}, \quad \dot{p}_3 = \frac{v_2 p_1}{I_2} - \frac{v_1 p_2}{I_1}, \\ \dot{v}_1 &= \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) v_2 v_3, \quad \dot{v}_2 = \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3} \right) v_1 v_2, \quad \dot{v}_3 = \left( \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) v_2 v_1. \end{aligned}$$

Levoinvariantní je rovněž Legendreovo zobrazení  $\alpha_H$ , generující zobrazení  $\alpha_H^L : L^* \rightarrow L$ . V našem případě je  $\alpha_H^L$  dáno výrazy  $v_i = p_i/m$ ,  $\omega_i = v_i/I_i$  a proto má systém rovnic na  $L$  odpovídající poli  $\alpha_H^L(\mathbf{X}_H^L)$  tvar

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= \omega_3 v_2 - \omega_2 v_3, & \dot{v}_2 &= \omega_1 v_3 - \omega_3 v_1, & \dot{v}_3 &= \omega_2 v_1 - \omega_1 v_2, \\ \dot{\omega}_1 &= \frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega_2 \omega_3, & \dot{\omega}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_3 \omega_1, & \dot{\omega}_3 &= \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_1 \omega_2.\end{aligned}$$

Prvé tři rovnice tohoto systému vyjadřují zákony zachování hybnosti ve směru souřadnicových os zapsané v pohyblivém repéru  $E$  a jsou pro nás nezajímavé. Druhá trojice těchto rovnic již reprezentuje Eulerovy rovnice otáčivého tuhého tělesa. To má za následek, že pole  $\alpha_H^L(\mathbf{X}_H^L)$  na  $L$  v případě libovolného levoinvariantního hamiltoniánu  $H$  na  $T^*(G)$  lze považovat za zobecněné Eulerovy rovnice tuhého tělesa (pochopitelně, je-li  $\alpha_H$  difeomorfismus). Funkce  $\mathbf{p}^2 = \sum_{i=1}^3 p_i^2$  a  $\mathbf{v}^2 = \sum_{i=1}^3 v_i^2$  jsou invarianty grupy  $G(3)$ , protože  $\mathbf{X}_{\mathbf{p}^2}^L = \mathbf{X}_{\mathbf{v}^2}^L = 0$ . Projekce variety  $\{H = c_1\} \cap \{\mathbf{p}^2 = c_2\} \cap \{\mathbf{v}^2 = c_3\}$  na  $\mathbf{v}$  prostor ( $= T_e^*(SO(3)) \subset T_{E_0}(G(3))$ ) zadávají rovnice

$$\sum_{i=1}^3 \frac{v_i^2}{2I_i} = c_1 - \frac{c_2}{2m}, \quad \mathbf{v}^2 = c_3.$$

Můžeme tedy říci, že pohyb tuhého tělesa je popsán v neparametrické formě těmito křivkami, či s ohledem na  $\alpha_H$  křivkami

$$\sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2 = \text{konst}, \quad \sum_{i=1}^3 I_i^2 \omega_i^2 = \text{konst},$$

kteří jsou řešením Eulerových rovnic.

Závěrem uvedme, že existuje vazba mezi trajektoriemi pole  $\mathbf{X}_H$  a „Eulerova pole“  $\alpha_H^L(\mathbf{X}_H^L)$ ; je-li  $\alpha(t)$  trajektorie Eulerova pole, projekce  $\gamma(t)$  trajektorie  $\bar{\gamma}(t)$  pole  $\mathbf{X}_H$  na  $G$  má tvar  $\gamma(t) = \exp \alpha(t)$  a opačně. Zde  $\exp: L \rightarrow G$  značí exponenciální zobrazení.

### 13.11 Matematické úlohy dynamiky stratifikované tekutiny

Při matematickém modelování procesů v nelineárních prostředích častou pozornost věnujeme poznávání dynamiky nehomogenních, zejména stratifikovaných tekutin. Velkou měrou to platí pro geofyziku, oceánologii, fyziku

atmosféry, ale i tehdy, máme-li na mysli ryze technické problémy kolem proudění tekutin. Stratifikovanou tekutinou míníme tekutinu, jejíž fyzikální charakteristiky, např. její hustota, vazkost, tepelný obsah a další, jsou ve stacionárním stavu funkcemi toliko jedné prostorové souřadnice. Ke stratifikaci prostředí může dojít z různých fyzikálních příčin, rovněž působením zemské tíže na tekutinu, generující nehomogenitu její hustoty ve směru působení gravitačního pole. Taková nehomogenita bývá označována jako hustota stratifikace. Právě ta ve srovnání s jinými vidy stratifikace nejvýrazněji ovlivňuje dynamické vlastnosti tekutin a vlnové procesy, k nimž v tekutinách dochází. Proto nadále budeme spojovat stratifikaci tekutiny pouze s působením tíže.

Studium stratifikovaných tekutin před nás staví dosti komplikované otázky, jejichž řešení může být obtížné a dosažitelné toliko numerickými metodami. Ne vždy lze formulovat problém tak, aby existovalo jeho analytické řešení. Zde je třeba říci, že pokud vůbec můžeme imitovat děje v nelineárních prostředích lineárními matematickými modely a způsob řešení podat analyticky, platí to i pro úlohy týkající se dynamiky stratifikovaných tekutin. Nelze avšak opomenout, že jejich matematické formulace mohou být poněkud „svérázné“ a zhusta vyústí v nestandardní matematický popis, nemající analogii v klasické matematické fyzice [29]. Také je třeba říci, že zatímco matematický model dokonalé stratifikované tekutiny ve tvaru Eulerovy hydrodynamické rovnice je znám již dávno, systematické studium o korektnosti zde vznikajících úloh matematické fyziky prakticky je stále ještě neuzavřené [29].

Úvodem zaměříme pozornost na základní okrajové a počáteční úlohy dynamiky stratifikované tekutiny, tak jak jsou popsány v [29]. Přitom budeme mít na mysli malé pohyby stratifikované stlačitelné tekutiny v kartézském souřadnicovém systému  $(x_1, x_2, x_3)$  pevně spojeným s rotující tekutinou (takový systém rotuje spolu s tekutinou). Předpokládejme, že k rotaci dochází kolem osy  $Ox_3$ , a tak pro Coriolisův vektor  $\mathbf{k}_0$  dostáváme  $\mathbf{k}_0 = (0, 0, \alpha)$ , kde je  $\alpha$  dvojnásobkem úhlové rychlosti rotace. Necht' je tekutina stratifikována podél osy  $Ox_3$  a proto je její hustota v neperturovaném stacionárním stavu jen funkcí souřadnice  $x_3$ , tedy  $\rho_0 = \rho_0(x_3)$ . Malé pohyby takové tekutiny v tíhovém poli za nepřítomnosti dalších vnějších sil poté lze popsat rovnicemi [29]

$$\begin{aligned} \rho_0(x_3) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_0(x_3) [\mathbf{k}_0, \mathbf{v}] + \nabla p + \rho_1 \mathbf{e}_3 g &= 0, \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0(x_3) \mathbf{v}) &= 0, \end{aligned} \tag{13.90a}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = c^{-2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0(x_3) \omega_0^2 g^{-1}(\mathbf{e}_3, \mathbf{v}), \quad (13.90b)$$

v nichž  $[ \ , ]$  a  $( \ , )$  je vektorový a skalární součin v  $\mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vektor rychlosti tekuté částice,  $\rho_1$  změna hustoty tekutiny způsobená jejím pohybem,  $p$  dynamický tlak,  $\mathbf{e}_3$  jednotkový vektor ve směru osy  $Ox_3$ ,  $g$  tíhové zrychlení Země,  $c$  rychlost zvuku v příslušném tekutém prostředí a  $\omega_0^2$  čtverec Bruntovy-Vaisalovy frekvence:

$$\omega_0^2(x_3) = -g \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} \rho_0^{-1}(x_3) + c^{-2} g \right).$$

Podmínka  $\omega_0^2 \geq 0$  vyjadřuje stabilitu rozdělení hustoty  $\rho_0(x_3)$  tekutiny a v ní nepřítomnost konvektivních pohybů.

Všimněme si, že první rovnice systému (13.90) je zákonem zachování hybnosti, druhá představuje linearizovanou rovnici kontinuity a třetí rovnice je zápisem stavové rovnice stlačitelné stratifikované tekutiny.

Okrajové podmínky splňující řešení rovnic (13.90) budeme formulovat ve tvaru  $p|_F = \phi|_F$  za předpokladu, že známe hodnotu dynamického tlaku  $p$  na okraji  $F$  oblasti vyplněné tekutinou. Není to však volba jediná: podmínku na hranici proudové oblasti pro druhou okrajovou úlohu udává vztah  $(\mathbf{n}, \mathbf{v})|_F = 0$ , který je podmínkou nepropustnosti tekutiny tuhou stěnou. O třetí okrajové úloze hovoříme tehdy, když  $\left. \frac{\partial p}{\partial t} - \rho_0(x_3) \tilde{g}(\mathbf{n}, \mathbf{v}) \right|_{x_3 = \eta(x_1, x_2)} = 0$ , jak vyplývá z linearizovaných kinematických a dynamických podmínek na volné ploše, v neperturovaném stavu dané rovnicí  $x_3 = \eta(x_1, x_2)$  s vektorem normály  $\mathbf{n}$  této plochy. Veličina  $\tilde{g}$  udává efektivní sílu tíže na volné ploše a je určena gravitačními a centrálními silami, tj. silami, stále mířícími k těmuž bodu (středu přitažlivosti).

Nadále budeme požadovat, aby rychlost zvuku  $c$  byla konstantní, což platí pro izotermické procesy v atmosféře a v tekutinách při zachování entropie. Navíc nám půjde o exponenciálně stratifikovanou tekutinu s hustotou  $\rho_0(x_3) = A \exp(-2\beta x_3)$ ,  $\beta > 0$ , odpovídající boltzmannovskému rozdělení v homogenním tíhovém poli. Tehdy  $\omega_0^2 = 2\beta g - c^{-2} g^2 \geq 0$  je konstanta.

S ohledem na vektorový charakter systému (13.90) se jedná v obecném případě o složitou úlohu a je tedy zcela přirozená snaha redukovat tento systém při konstantních hodnotách  $\omega_0$  a  $c$  na jedinou skalární rovnici. Uvážíme-li, že funkci  $\rho_1$  můžeme z (13.90) snadno eliminovat, řešením tohoto systému budeme nadále rozumět soubor funkcí  $(\mathbf{v}, p)$ .



Budeme předpokládat, že řešení  $(\mathbf{v}, p)$  systému (13.90) splňuje podmínky

$$\mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}, \nabla p, \frac{\partial}{\partial t} \nabla p \in L_2(\Omega), \quad \frac{\partial}{\partial t} p \in L_2(\Omega), \quad (13.91)$$

se zobecněnými derivacemi příslušných funkcí. Vyslovme:

Teorém 1. Libovolné řešení  $(\mathbf{v}, p)$  systému (13.90) v ohraničené oblasti  $\Omega$  s hladkým okrajem  $\Gamma$  vyhovující podmínkám (13.91) v případě  $\rho_0(x_3) = A \exp(-2\beta x_3)$ ,  $\beta > 0$  pro  $\omega_0^2 \neq \alpha^2$ , zapisujeme ve tvaru

$$p = - \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2 \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha^2 \right) \Phi, \quad (13.92)$$

$$\rho_0(x_3) \mathbf{v} = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2 \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi - [\mathbf{K}_0, \nabla \Phi] \right\} + \mathbf{e}_3 \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha^2 \right) \frac{\mathbf{g}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi + (\alpha^2 - \omega_0^2) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_3} \Phi \right\},$$

kde je funkce  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  řešením diferenciální rovnice

$$\mathbf{S} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \Phi \right] \equiv \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^4}{\partial t^4} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} L_0 - L_1 \right] \frac{\partial}{\partial t} \Phi = 0, \quad (13.93)$$

$$L_0 = \Delta_3 + 2\beta \partial / \partial x_3 - \alpha^2 / c^2,$$

$$L_1 = \omega_0^2 \Delta_2 + \alpha^2 (\partial^2 / \partial x_3^2 + 2\beta \partial / \partial x_3),$$

$$\Delta_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \Delta_2 = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Platí i obrácené tvrzení: libovolné řešení rovnice (13.93) v oblasti  $\Omega$  ve tvaru (13.92) je řešením systému (13.90).

Všimněme si, že (13.93) je rovnicí 5. řádu. Její řád však můžeme snadno snížit. Když položíme  $u(\mathbf{x}, t) = (\partial / \partial t) \Phi(\mathbf{x}, t) \exp(\beta x_3)$ , pro funkci  $u(\mathbf{x}, t)$  dostáváme rovnici

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^4}{\partial t^4} u = \frac{\partial^2}{\partial t^2} K_0 u + K_1 u, \quad (13.94)$$

kteřou nazveme rovnicí dynamiky stratifikované rotující stlačitelné tekutiny. Operátory  $K_0$  a  $K_1$  v (13.94) jsou definovány zápisy

$$K_0 = \Delta_3 - (\beta^2 + \alpha^2 / c^2),$$

$$K_1 = \omega_0^2 \Delta_2 + \alpha^2 \partial^2 / \partial x_3^2 - \alpha^2 \beta^2.$$

Věnujme dále pozornost některým zvláštním případům rovnice (13.94), majícím význam pro praxi.

Nechť je stratifikovaná rotující tekutina nestlačitelná, tj.  $c = \infty$ . Tehdy (13.94) přechází na rovnici

$$\mathbf{M}[u] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\Delta_3 - \beta^2] u + \omega_0^2 \Delta_2 u + \alpha^2 u_{x_3 x_3} - \alpha^2 \beta^2 u = 0 \quad (13.95)$$

gravitačně setrvačných vln, která je základním matematickým modelem pro studium lineárních vnitřních vln v oceánu.

Jestliže se zaměříme na dynamiku slabě stratifikované tekutiny, kde se uplatní Boussinesqova aproximace, v operátorech  $K_0$ ,  $K_1$  rovnice (13.94) vymizí členy úměrné  $\beta^2$  a (13.95) nabývá tvaru

$$\mathbf{M}_0[u] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_3 u + \omega_0^2 \Delta_2 u + \alpha^2 u_{x_3 x_3} = 0 \quad (13.96)$$

a pak mluvíme o rovnici gravitačně setrvačných vln v Boussinesqově aproximaci.

Když dále uvážíme nestlačitelnou stratifikovanou nerotující tekutinu, tj. klademe  $c = \infty$ ,  $\alpha = 0$ , dostáváme rovnici

$$\mathbf{N}[u] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\Delta_3 - \beta^2] u + \omega_0^2 \Delta_2 u = 0, \quad (13.97)$$

nazvanou rovnici vnitřních vln a její analogii v Boussinesqově aproximaci

$$\mathbf{N}_0[u] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_3 u + \omega_0^2 \Delta_2 u = 0. \quad (13.98)$$

Tyto rovnice získáme z (13.95), (13.96), když položíme  $\alpha = 0$ .

Dříve než přikročíme k dalšímu tématu, řekněme si, že okrajové úlohy pro rovnice (13.94), (13.95) až (13.98) dostaneme z podmínek  $p|_r = \varphi|_r$ ,  $(\mathbf{n}, \mathbf{v})|_r = 0$ ,  $\partial p / \partial t - \rho_0(x_3) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{v})|_{x_3 = \eta(x_1, x_2)} = 0$ , přihlédneme-li k předpokladům týkajících se veličin  $c$  a  $\alpha$ . Vedle okrajových podmínek je třeba formulovat počáteční podmínky a v případech rovnic (13.95) až (13.98) uvažovaných v neohraničených oblastech, je třeba vytvořit podmínky v nekonečnu. Jednotlivé příklady takových podmínek budou předloženy v následujících oddílech.

Naším nejbližším úkolem jsou nyní otázky spojené s existencí zobecněných řešení základních smíšených úloh pro rovnice (13.94), (13.95) až (13.98).

Vyjdeme z následující úlohy:

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, D)u \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L_0(\mathbf{x}, D)u \right] - L_1(\mathbf{x}, D)u = f(\mathbf{x}, t),$$

$$u|_r = 0, \quad \frac{\partial^m}{\partial t^m} u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad m = 0, 1, 2, 3, \quad (13.99)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad t \in \langle 0, T \rangle, \quad T > 0.$$

Zde jsou  $L_0(\mathbf{x}, D)$  a  $L_1(\mathbf{x}, D)$  lineární diferenciální operátory 2. řádu, pro něž platí

$$L_0(\mathbf{x}, D)u = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (B_i(\mathbf{x})u) - B_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] + c(\mathbf{x})u,$$

$$L_1(\mathbf{x}, D)u = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^3 b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + d(\mathbf{x})u$$

a které mají následující vlastnosti:

a)  $A_{ij}(\mathbf{x}), a_{ij}(\mathbf{x}) \in C^{(1)}(\Omega)$ ;

$B_i(\mathbf{x}), b_i(\mathbf{x}), c(\mathbf{x}), d(\mathbf{x}) \in C^{(0)}(\Omega)$ ;

b) operátor  $L_0(\mathbf{x}, D)$  je symetrický a stejnoměrně eliptický;

c) operátor  $L_1(\mathbf{x}, D)$  je libovolný, zejména může být degenerovaný a také operátorem smíšeného typu.

Poznámka 21: zápis  $f(\mathbf{x}) \in C^{(0)}(\Omega)$  znamená, že funkce  $f$  je spojitá v  $\Omega$ . Symbolem  $C^{(k)}(\Omega)$  rozumíme množinu funkcí  $f(\mathbf{x})$ , jejichž parciální derivace do  $k$ -tého řádu včetně jsou spojitě v  $\Omega$ . Hilbertův prostor s prvky z  $L^2(\Omega)$ , které mají v oblasti  $\Omega$  zobecněné derivace do  $k$ -tého řádu včetně, označíme  $W_2^{(k)}(\Omega)$ . Je-li  $C_0^{(\infty)}(\Omega)$  množina funkcí s kompaktním nosičem v  $\Omega$ , pak  $W_2^{(k)}(\Omega)$  je uzávěrem množiny  $C_0^{(\infty)}(\Omega)$  v metrickém prostoru  $W_2^{(k)}(\Omega)$  a  $C_0^{(\infty)}(\Omega)$  je množinou všech funkcí z  $C^{(k)}(\Omega)$ , pro něž je supremum těchto funkcí podmnožinou  $\Omega$ .  $W_2^{(k)}(\Omega)$  je uzávěr množiny  $C_0^{(\infty)}(\Omega)$  v metrice prostoru  $W_2^{(k)}(\Omega)$ , tj.  $\rho(u, v)_W^{(k)} = (u, v)_{W_2^{(k)}} = \|u - v\|_{W_2^{(k)}}$ ;  $u, v \in C^{(\infty)}(\bar{\Omega})$ , kde  $\bar{\Omega}$  je uzávěr oblasti  $\Omega$ .

Považujme  $f(\mathbf{x}, t)$  za abstraktní funkci  $t \in \langle 0, T \rangle$  s hodnotami v jistém Banachově prostoru  $B$  a zavedme si prostor  $C_0^{(k)}[0, T; B]$  funkcí  $f(\mathbf{x}, t)$  s normou

$$\|f\|_{k,T} = \sup_{t \in \langle 0, T \rangle} \left\| \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \right\|_B$$

a to funkcí  $f$  takových, že  $(\partial^m / \partial t^m) f(\mathbf{x}, 0) = 0$  pro  $m = 0, 1, \dots, k-1$ .

Uvažme operátor  $R_{x,t}$ :  $v = R_{x,t} f$ , zadaný na funkcích

$$f(\mathbf{x}, t) \in C^{(0)}[0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega)]$$

a definovaný jako operátor zadávající zobecněné řešení pomocné úlohy pro vlnovou rovnici

$$\begin{aligned} \partial^2 v / \partial t^2 &= L_0(\mathbf{x}, D)v + f(\mathbf{x}, t), \\ v|_{\Gamma} &= 0, \quad v(\mathbf{x}, 0) = \partial[v(\mathbf{x}, 0)] / \partial t = 0, \\ \mathbf{x} &\in \Omega, \quad t \in \langle 0, T \rangle. \end{aligned} \quad (13.100)$$

Pomocí operátoru  $R_{x,t}$  lze úlohu (13.99) přepsat takto:

$$\begin{aligned} \partial^2 u / \partial t^2 &= R_{t,x} L_1(\mathbf{x}, D)u + R_{t,x} f, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (13.101)$$

Nyní (13.101) chápeme jako Cauchyho úlohu pro abstraktní diferenciální rovnici s operátorem  $U(t) = R_{x,t} L_1(\mathbf{x}, D)$ .

Podotkněme, že řešením úlohy (13.99) z  $C_0^{(p)}[0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega)]$  pro  $p \geq 3$  budeme rozumět zobecněné řešení úlohy (13.99).

S úlohou (13.99) je spojena platnost následného teoremu:

**Teorém 2.** Pro libovolnou funkci  $f(\mathbf{x}, t) \in C^{(0)}[0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega)]$  existuje jednoznačné řešení zobecněné úlohy (13.99) náležející  $C_0^{(3)}[0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega)]$ .

O hladkosti získaného zobecněného řešení vypovídá:

**Teorém 3.** Jestliže  $f(\mathbf{x}, t) \in C_0^{(m)}[0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega)]$ , zobecněné řešení úlohy (13.99) je z  $C_0^{(m+3)}[0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega)]$ .

Důkaz teorémů 2 a 3 je založen na důkladné analýze vlastností operátorů  $R_{x,t}$  a  $U(t)$  v prostorech  $C_0^{(m)}[0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega)]$ .

Popsaným postupem je dokázána existence zobecněných řešení první okrajové úlohy  $p|_r = \varphi|_r$  pro rovnici (13.94). Diskuse zobecněných řešení druhé a třetí okrajové úlohy ( $(\mathbf{n}, \mathbf{v})|_r = 0$ ,  $\partial p / \partial t - \rho_0(x_3) \tilde{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})|_{x_3 = \eta(x_1, x_2)} = 0$ ) pro tuto rovnici je značně komplikovaná s ohledem na charakter okrajových podmínek obsahujících časové derivace.

Obraťme pozornost ke smíšeným úlohám pro rovnice (13.95) až (13.98). Nejprve uvážíme první okrajovou úlohu pro rovnici (13.95):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[u] &= f(\mathbf{x}, t), \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}), \\ u|_r &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \langle 0, T \rangle. \end{aligned} \quad (13.102)$$

Nechť  $u_0, u_1 \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$  a  $f(\mathbf{x}, t) \in C^{(0)}[0, T; \overset{0}{W}_2^{-1}(\Omega)]$ , kde  $\overset{0}{W}_2^{-1}(\Omega) = [\overset{0}{W}_2^1(\Omega)]^*$  je prostor duální k prostoru  $\overset{0}{W}_2^1(\Omega)$  vzhledem ke skalárnímu součinu v  $L_2(\Omega)$ . Nechť  $G$  je Greenův operátor první okrajové úlohy pro Laplaceův operátor. Poté rovnici (13.102) přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [u - \beta^2 Gu] + \omega_0^2 (A_1 + A_2)u + \alpha^2 A_3 u - \alpha^2 \beta^2 Gu &= Gf, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}), \\ u(\cdot, t) &\in \overset{0}{W}_2^1(\Omega), \end{aligned} \quad (13.103)$$

kde operátory  $A_k$  jsou dány vztahy  $A_k = G(\partial^2 / \partial x_k^2)$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Tyto operátory jsou ohraničenými samoadjungovanými operátory v  $\overset{0}{W}_2^1(\Omega)$ . V prostoru  $\overset{0}{W}_2^1(\Omega)$  k operátoru  $E \equiv \beta^2 G$ , kde je  $E$  jednotkový operátor, existuje inverzní operátor a uvážíme-li, že  $Gf \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$  pro  $t \geq 0$  místo (13.103) píšeme

$$\begin{aligned} \partial^2 u / \partial t^2 &= Au + F, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (13.104)$$

kde

$$\Lambda \equiv (E - \beta^2 G)^{-1} [\omega_0^2 (A_1 + A_2) + \alpha^2 A_3 - \alpha^2 \beta^2 G],$$

$$F(\mathbf{x}, t) = (E - \beta^2 G)^{-1} Gf(\mathbf{x}, t) \in C^{(0)} \left[ 0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega) \right].$$

Řešením úlohy (13.104) budeme nazývat zobecněné řešení úlohy (13.102). Teorie diferenciálních rovnic v abstraktních Banachových prostorech nás přivádí k následnému výroku:

**Teorem 4.** Pro libovolná  $u_0(\mathbf{x}), u_1(\mathbf{x}) \in \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$  a  $f(\mathbf{x}, t) \in C^{(0)}[0, T; \overset{0}{W}_2^{-1}(\Omega)]$  existuje jediné řešení úlohy (13.102) v prostoru  $C^{(2)}[0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega)]$ . Jestliže  $f(\mathbf{x}, t) \in C^{(m)}[0, T; \overset{0}{W}_2^{-1}(\Omega)]$ , toto řešení je z  $C^{(m+2)}[0, T; \overset{0}{W}_2^1(\Omega)]$ .

Obrátme pozornost k smíšené úloze (13.96), týkající se gravitačně setrvačných vln v Boussinesqově aproximaci. Bude to úloha

$$\mathbf{M}_0[u] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_3 u + \omega_0^2 \Delta_2 u + \alpha^2 u_{x_3 x_3} = 0,$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial n} + \omega_0^2 (\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) u_{x_1} + \omega_0^2 (\mathbf{e}_2, \mathbf{n}) u_{x_2} + \alpha^2 (\mathbf{e}_3, \mathbf{n}) u_{x_3} +$$

$$- [\mathbf{n}, \mathbf{k}_0] \nabla \frac{\partial u}{\partial t} - \omega_0^2 \int_0^t [\mathbf{n}, \mathbf{k}_0] \nabla u(\mathbf{x}, \tau) d\tau \Big|_{\mathbf{x} \in \Gamma} = 0. \quad (13.105)$$

Okrajové podmínky v (13.105) odpovídají druhé okrajové úloze  $(\mathbf{n}, \mathbf{v})|_{\Gamma} = 0$  a odtud je dostaneme na základě vztahů (13.92) v Boussinesqově aproximaci.

Označme  $\hat{W}_2^1(\Omega)$  prostor  $W_2^1(\Omega)$  tvořený funkcemi splňujícími podmínku  $\int_{\Omega} u d\mathbf{x} = 0$ . V prostoru  $\hat{W}_2^1(\Omega)$  zavedme skalární součin  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}$ , ekvivalentní ve smyslu normy skalárnímu součinu ve výchozím prostoru  $W_2^1(\Omega)$ .

Nechť  $u \in C^{(2)}(\Omega) \cap C^{(1)}(\bar{\Omega}) \cap \hat{W}_2^1(\Omega)$ . Na této množině definujme operátory  $B$  a  $C$  ( $v = Bu$ ,  $w = Cu$ ) jako operátory zadávajícími řešení následujících okrajových úloh:

$$\Delta_3 v = -\omega_0^2 \Delta_2 u - \alpha^2 u_{x_3 x_3}, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial n} &= -\omega_0^2(\mathbf{e}_1, \mathbf{n})u_{x_1} - \omega_0^2(\mathbf{e}_2, \mathbf{n})u_{x_2} - \alpha^2(\mathbf{e}_3, \mathbf{n})u_{x_3}|_{x \in \Gamma}; \\ \Delta_3 w &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \partial w / \partial n &= [\mathbf{n}, \mathbf{k}_0] \nabla u|_{x \in \Gamma}, \quad \mathbf{k}_0 = (0, 0, \alpha).\end{aligned}$$

O těchto operátorech lze vyslovit:

Lemma 1. Operátory  $B$  a  $iC$  ( $i$  je imaginární jednotka) při jejich spojitosti přecházejí do ohraničených samoadjungovaných operátorů v  $\hat{W}_2^1(\Omega)$  (jsou rozšířením operátorů  $B$  a  $iC$ ), přičemž

$$\|B\|_{\hat{W}_2^1} = \max\{\alpha^2, \omega_0^2\}, \quad \|C\|_{\hat{W}_2^1} = |\alpha|.$$

Použijme operátorů  $B$  a  $C$  pro redukci úlohy (13.105). Položme  $u_t = v + w_1$ , kde  $v = Bu$  a  $w_1 = Cu_t + \omega_0^2 \int_0^t Cu(\tau) d\tau$ . Tím dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} u &= C \frac{\partial u}{\partial t} + Bu + \omega_0^2 \int_0^t Cu(\tau) d\tau, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}), \\ u(\cdot, t) &\in \hat{W}_2^1(\Omega), \quad t \in \langle 0, T \rangle.\end{aligned}\tag{13.106}$$

Řešení úlohy (13.106) nazvěme zobecněným řešením (13.105). Nahlížíme-li na (13.106) ze zorného úhlu teorie diferenciálních rovnic v Banachových prostorech, dospíváme k tvrzení:

Teorém 5. Pro libovolná  $u_0(\mathbf{x}), u_1(\mathbf{x}) \in \hat{W}_2^1(\Omega)$  existuje jediné zobecněné řešení úlohy (13.105), náležející  $C^{(m)}[0, T; \hat{W}_2^1(\Omega)]$  pro libovolné  $m \geq 2$ .

Poznámka 22: podle [29] důkaz teorém o existenci řešení má nekonstruktivní charakter a neumožňuje efektivně řešit uvažovanou úlohu. V tomto ohledu tento nedostatek odstraníme aplikací metod založených na teorii potenciálu, které již jsou konstruktivní a ukazují cestu, po níž lze dospět k vytvoření algoritmů pro řešení smíšených úloh, týkajících se dynamiky stratifikované tekutiny.

Je známo, že právě metoda potenciálů je jednou z nejrozšířenějších metod studia jak okrajových, tak i smíšených úloh. Na tomto místě podáme základy teorie dynamických potenciálů na příkladu rovnice vnitřních vln ve stratifikované tekutině, a to v Boussinsově aproximaci. Na těchto základech poté vyslovíme tvrzení o existenci klasických řešení.

Nejprve obrátíme pozornost k funkci

$$w(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi\omega_0 |\mathbf{x}|} \int_0^\xi J_0(\mu) d\mu,$$

$$\xi = \omega_0 t |x_3| / |\mathbf{x}|, \quad |\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2},$$

kde je  $J_0(\mu)$  Besselova funkce nultého řádu. Platí:

Lemma 2. Pro  $|\mathbf{x}| \neq 0$  je funkce  $w(\mathbf{x}, t)$  řešením rovnice (13.98) a přitom  $w(\mathbf{x}, 0) = 0$ ,  $(\partial/\partial t) w(\mathbf{x}, 0) = -1/(4\pi |\mathbf{x}|)$ .

Na funkci  $w(\mathbf{x}, t)$  tak můžeme nahlížet jako na singulární řešení rovnice (13.98).

Dále budeme předpokládat, že  $\Gamma \equiv \partial\Omega$  je plocha, s níž spojujeme jméno Ljapunovovo a věnujeme pozornost následujícím plošným dynamickým potenciálům

$$A[\mu](\mathbf{x}, t) = \int_\Gamma \mu(\mathbf{y}, t) \frac{\partial}{\partial n_y} \left( \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) d\Gamma_y,$$

$$B[\mu](\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_\Gamma \mu(\mathbf{y}, \tau) N_{\tau, \mathbf{y}} w(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) d\Gamma_y d\tau,$$

$$W[\mu](\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_\Gamma \mu(\mathbf{y}, \tau) w(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) d\Gamma_y d\tau,$$

kde

$$\mu(\mathbf{y}, t) \in C_0^{(2)} [0, \infty; C^{(0)}(\Gamma)].$$

Všimněme si, že  $A[\mu]$  je potenciál slupky závisující na čase jako na parametru a lineární kombinace  $B[\mu](\mathbf{x}, t) - A[\mu](\mathbf{x}, t)$  všude na  $\Gamma$  vyhovuje rovnici (13.98).

Základy teorie potenciálu pro rovnici (13.98) tvoří následující dvě lemmata:

Lemma 3. Necht'  $\Gamma$  je Ljapunovovou plochou a dále platí, že  $\mu(\mathbf{x}, t) \in C_0^{(2)} [0, \infty; C^{(0)}(\Gamma)]$ . Pak:

$$B_\pm[\mu](\mathbf{x}, t) = \mp \frac{\omega_0}{2} \int_0^t S(\omega_0(t - \tau)) \mu(\mathbf{x}, \tau) d\tau$$

$$+ B[\mu](\mathbf{x}, t) \in C_0^{(2)} [0, \infty; C^{(0)}(\Gamma)], \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Gamma.$$



Lemma 4. Necht'  $\Gamma$  je Ljapunovovou plochou,  $\mu(\mathbf{x}, t) \in C_0^{(2)}[0, \infty; C^{(0)}(\Gamma)]$ . Poté bude:

$$\begin{aligned} [N_{t,\mathbf{x}}W[\mu]]_{\pm}(\mathbf{x}, t) = & \mp \frac{1}{2} \mu(\mathbf{x}, t) \mp \frac{\omega_0}{2} \int_0^t S(\omega_0(t-\tau)) \mu(\mathbf{x}, \tau) d\tau - \\ & - \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}, t) \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{x}}} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d\Gamma_{\mathbf{y}} + \\ & + \int_0^t \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}, \tau) N_{t,\mathbf{x}}w(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-\tau) d\Gamma_{\mathbf{y}} d\tau \in C_0^{(2)}[0, \infty; C^{(0)}(\Gamma)]. \end{aligned}$$

Indexy  $+$  a  $-$  v těchto lemmatech označují limitní hodnoty v bodě  $\mathbf{x} \in \Gamma$ , směřujeme-li k tomuto bodu po vnitřní a vnější normále oblasti  $\Omega$ . Pro funkci  $S(\omega_0 t)$  máme

$$S(\omega_0 t) = \int_0^{\omega_0 t} J_0'(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha},$$

kde je  $J_0(\alpha)$  Besselova funkce nultého řádu.

Věnujme pozornost úlohám

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_0[u] &= 0, u(\mathbf{x}, 0) = u_t(\mathbf{x}, 0) = 0, \mathbf{x} \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} &= \varphi(\mathbf{x}, t) \in C_0^{(2)}[0, \infty; C^0(\Gamma)], \mathbf{x} \in \Gamma; \\ \mathbf{N}_0[u] &= 0, u(\mathbf{x}, 0) = u_t(\mathbf{x}, 0) = 0, \mathbf{x} \in \Omega, \\ N_{t,\mathbf{x}}u|_{\Gamma} &= \varphi(\mathbf{x}, t) \in C_0^{(2)}[0, \infty; C^{(0)}(\Gamma)], \mathbf{x} \in \Gamma \end{aligned}$$

a jejich vnějším analogiím  $S_1^-$  a  $S_2^-$ , uvažovaným v  $\mathbf{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ . Při formulaci vnějších úloh  $S_{1,2}^-$  požadujeme splnění podmínek regularity v nekonečnu:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} u \right| &\leq \frac{A_k(t)}{|\mathbf{x}|}, \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \nabla u \right| \leq \frac{B_k(t)}{|\mathbf{x}|^2}, \\ \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} D_{x_i} D_{x_j} u \right| &\leq \frac{C_k(t)}{|\mathbf{x}|^3}, k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Zde jsou  $A_k(t)$ ,  $B_k(t)$ ,  $C_k(t)$  spojité funkce v čase  $t$  a  $D_{x_i} = \partial/\partial x_i$ . Podotkněme, že okrajové úloze s operátorem  $N_{t,\mathbf{x}}$  v úlohách  $S_2^{\pm}$  odpovídá nehomogenní okrajová úloha druhé okrajové úlohy (viz rovnice (13.98)).

Řešení úloh  $S_1^\pm$  budeme hledat ve tvaru

$$u(\mathbf{x}, t) = B[\mu](\mathbf{x}, t) - A[\mu](\mathbf{x}, t) \quad (13.107)$$

a pro úlohy  $S_2^\pm$  píšeme

$$u(\mathbf{x}, t) = W[\mu](\mathbf{x}, t). \quad (13.108)$$

Funkce (13.107) a (13.108) vyhovují rovnici (13.98) i počátečním podmínkám pro  $\mu(\mathbf{x}, t) \in C_0^{(2)}[0, \infty; C^{(0)}(\Gamma)]$ . Jestliže nyní přihlídneme k lemmatům 3 a 4, dospějeme k následné integrální rovnici pro úlohy  $S_1^\pm$ :

$$\pm(1/2)\mu(\mathbf{x}, t) - A[\mu](\mathbf{x}, t) + B[\mu](\mathbf{x}, t) \mp (1/2)\omega_0 S[\mu](\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (13.109)$$

a úloh  $S_2^\pm$  se týká rovnice

$$\mp(1/2)\mu(\mathbf{x}, t) - A^*[\mu](\mathbf{x}, t) + B^*[\mu](\mathbf{x}, t) \mp (1/2)\omega_0 S[\mu](\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (13.110)$$

Horní znaménka v (13.109) a (13.110) odpovídají úlohám  $S_{1,2}^+$  a dolní přísluší  $S_{1,2}^-$ . Symboly  $A^*$ ,  $B^*$  a písmenem  $S$  označme operátory

$$\begin{aligned} A^*[\mu](\mathbf{x}, t) &= \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}, t) \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{x}}} \frac{1}{4\pi(\mathbf{x} - \mathbf{y})} d\Gamma_{\mathbf{y}}, \\ B^*[\mu](\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{y}, \tau) N_{t, \mathbf{x}} w(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) d\Gamma_{\mathbf{y}} d\tau, \\ S[\mu](\mathbf{x}, t) &= \int_0^t S(\omega_0(t - \tau)) \mu(\mathbf{x}, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že rovnice (13.109) a (13.110) jsou zvláštními případy obecné rovnice

$$\mu - \mathbf{A}\mu + \int_0^t \mathbf{B}(t - \tau)\mu(\tau) d\tau = \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (13.111)$$

v Banachově prostoru  $C_0^{(2)}[0, T; H]$ , kde  $H \equiv C^{(0)}(\Gamma)$ . V rovnici (13.111) je  $\mathbf{A}$  na čase nezáviselý ohraničený operátor v  $H$  a  $\mathbf{B}(t)$  na čase záviselý ope-

rátor, ohraničený v  $H$ . Konkrétní tvar operátorů  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}(t)$  vyčteme z rovnic (13.109), (13.110), přičemž  $\mathbf{B}(0) = 0$ .

Řekněme si, s jakými případy se můžeme setkat v případě rovnice (13.111) s operátory  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}(t)$  v úlohách  $S_{1,2}^{\pm}$ :

1. V prostoru  $H$  existuje k operátoru  $\mathbf{E} - \mathbf{A}$  operátor inverzní. Když rovnici (13.111) vynásobíme  $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$  a použijeme metody postupných aproximací, docházíme k závěru, že pro libovolné  $\varphi(\mathbf{x}, t) \in C_0^{(2)}[0, T; H]$  je rovnice jednoznačně řešitelná v  $C_0^{(2)}[0, T; H]$  pro libovolné  $T > 0$ . Tak tomu je v případě úloh  $S_1^+$  a  $S_2^-$ ;

2. K operátoru  $\mathbf{E} - \mathbf{A}$  neexistuje operátor inverzní v  $H$  a definiční oblast operátoru

$$\mathbf{B}(t) * \mu(t) = \int_0^t \mathbf{B}(t - \tau) \mu(\tau) d\tau$$

leží v oblasti, v níž je definován operátor  $\mathbf{E} - \mathbf{A}$ , tj.  $R(\mathbf{B}(t)*) \subset R(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ . V tomto případě, pokud  $\varphi(\mathbf{x}, t) \in R(\mathbf{E} - \mathbf{A})$  pro libovolné  $t \geq 0$ , metodu postupných aproximací lze použít v podprostoru prostoru  $H$ , kde k  $\mathbf{E} - \mathbf{A}$  existuje operátor inverzní a tak je dokázána řešitelnost rovnice (13.111) pro případ  $\varphi(\mathbf{x}, t) \in R(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ . Máme-li na zřeteli úlohu  $S_2^+$ , v níž se setkáváme s popsanou situací, operátor  $\mathbf{A}$  je totálně spojitý a doplněk  $R(\mathbf{E} - \mathbf{A})$  v prostoru  $H$  je jednodimenzionální a podmínku  $\varphi(\mathbf{x}, t) \in R(\mathbf{E} - \mathbf{A})$  formulujeme v termínech podmínek ortogonality  $(1, \varphi)_{L^2(I)} = 0$  pro všechna  $t \geq 0$ .

Připomeňme si, že doplňkem (komplementem) jisté množiny  $M$  v prostoru  $P$  rozumíme množinu  $P \setminus M$ , tj. prostor  $P$ , z něhož jsou vyňaty body náležející množině  $M$ .

Poznámka 23: symbolem  $R(\mathbf{E} - \mathbf{A})$  značíme obraz množiny  $D(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ , tj. obraz definičního oboru operátoru  $\mathbf{E} - \mathbf{A}$ . Při vzájemně jednoznačném (prostém) zobrazení  $D(\mathbf{E} - \mathbf{A})$  do  $R(\mathbf{E} - \mathbf{A})$  existuje inverzní operátor  $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$  s definičním oborem  $R(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ , který každému  $\mathbf{x}' \in R(\mathbf{E} - \mathbf{A})$  přiřazuje právě jedno  $\mathbf{x} \in D(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ , a to právě to  $\mathbf{x} \in D(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ , pro které platí  $\mathbf{x}' = (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x}$ . Tehdy  $\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{x}' = (\mathbf{E} - \mathbf{A})(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}'$ ;

3. K operátoru  $\mathbf{E} - \mathbf{A}$  neexistuje operátor inverzní a definiční oblast operátoru  $\mathbf{B}(t) *$  nenáleží  $R(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ . Nicméně, v případě úlohy  $S_1^-$  (rovnice (13.109) s dolními znaménky), kde dochází k této situaci, s (13.111) sdružená (koadjungovaná) rovnice v prostoru  $L^2[0, T; L^2(I)]$  je rovnicí vyhovující podmínkám předchozího případu. Tím máme možnost studovat otázku o její řešitelnosti a také řešitelnosti rovnice (13.111).

Ukazuje se, že rovnice (13.111) pro úlohu  $S_1^-$ , tj. rovnice (13.111) s dolními znaménky, je řešitelná jen při splnění podmínky ortogonality pravé strany  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  a jisté funkce  $\mu_0(\mathbf{x}, t)$  v  $L^2[0, T; L^2(\Gamma)]$ . Avšak nejde o podmínku nutnou pro řešitelnost úlohy  $S_1^-$  a je podmíněna toliko speciálním tvarem zápisu řešení ve tvaru potenciálu (13.107). Máme-li místo (13.107) na zřeteli vztah

$$u(\mathbf{x}, t) = B[\mu](\mathbf{x}, t) - A[\mu](\mathbf{x}, t) + \int_0^t c(\tau) w(\mathbf{x} - \mathbf{a}, t - \tau) d\tau,$$

kde  $\mathbf{a} \in \Omega$  a  $c(t) \in C^{(2)}(0, \infty)$ , místo (13.77) máme rovnici

$$\mu - \mathbf{A}\mu + \int_0^t \mathbf{B}(t - \tau)\mu(\tau) d\tau + \int_0^t c(\tau) w(\mathbf{x} - \mathbf{a}, t - \tau) d\tau = \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (13.112)$$

Operátory  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}(t)$  jsou zadány rovnicí (13.109) s dolními znaménky. Na vrub volby funkce  $c(t)$  lze vyhovět zmíněné podmínce ortogonality a dospět bezpodmínečně k řešitelnosti (13.112) pro libovolnou funkci  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ .

Úvahy o řešitelnosti (13.111) s operátory v (13.109), (13.110) v úlohách  $S_{1,2}^\pm$  nám umožňují dokázat následný teorém o řešitelnosti:

**Teorém 6.** Jestliže  $\varphi(\mathbf{x}, t) \in C_0^{(2)}[0, \infty; C^{(0)}(\Gamma)]$ , úlohy  $S_1^\pm$  a  $S_2^-$  jsou řešitelné v klasickém smyslu. Je-li kromě toho,  $(1, \varphi)_{L^2(\Gamma)} = 0$  pro všechna  $t \geq 0$ , úloha  $S_2^+$  je rovněž řešitelná.

Náš další krok bude spočívat v aplikaci teorie potenciálu s ohledem na důkaz o teorému klasické řešitelnost základních smíšených úloh pro případ rovnic (13.98). Obdobná teorie potenciálu spolu s teorémy o klasické řešitelnosti může být předložena i pro rovnice (13.95) až (13.97) a také pro jejich dvojdímenzionální analogie. Úhrnem vzato náš počín budou rámcovat některé explicitní tvary řešení nestacionární úlohy, které nabývají základního významu v matematických modelech četných fyzikálních jevů. Je to dáno tím, že tyto úlohy mají postavení jistých „etalonů“, umožňujících nám pochopit podstatu navrhovaných modelů a také zhodnotit různé asymptotické a přibližné metody užívané při numerické analýze.

Vyjdeme z Cauchyho úlohy pro rovnici gravitačně setrvačných vln (13.96) v Boussinesgově aproximaci

$$\mathbf{M}_0[u] \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_3 u + \omega_0^2 \Delta_2 u + \alpha^2 u_{x_3 x_3} = 0,$$

nalezneme její explicitní řešení a budeme se zajímat o jeho chování pro velká  $t$ . Posuzováno z fyzikálního hlediska, tato úloha vede na matematický model dynamiky malých pohybů rotující slabě stratifikované tekutiny, vyplňující celý prostor  $\mathbf{R}^3$ .

Avšak ještě dříve než přistoupíme k formulaci Cauchyho úlohy, zastavíme se u fundamentálního řešení diferenciálního operátoru  $\mathbf{M}_0$  v rovnici (13.96). V tomto ohledu platí vztah

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \int_0^t J_0(\omega_0(t-\tau)) J_0(\lambda(\mathbf{x})\tau) d\tau = \\
 &= \begin{cases} -\frac{1}{2\pi^2|\mathbf{x}|} \int_{\lambda/\omega_0}^1 \frac{\sin \omega_0 t \mu}{[(1-\mu^2)(\mu^2 - \lambda^2/\omega_0^2)]^{1/2}} d\mu, & \mathbf{x} \neq (0, 0, x_3) \\ -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0}, & \mathbf{x} = (0, 0, x_3), \end{cases} \\
 \lambda = \lambda(\mathbf{x}) &= |\mathbf{x}|_* / |\mathbf{x}|; \quad |\mathbf{x}|_* = [\alpha^2(x_1^2 + x_2^2) + \omega_0^2 x_3^2]^{1/2};
 \end{aligned} \tag{13.113}$$

$J_0(t)$  je Besselova funkce.

V limitě  $\omega_0 \rightarrow 0$  v prvním řádku zápisu (13.113) docházíme k fundamentálnímu řešení Sobolevovy rovnice (citujeme podle [29]) a při  $\alpha \rightarrow 0$  dostaneme fundamentální řešení rovnice (13.98). Povšimněme si, že z (13.113) vyplývá, že v uvažovaném modelu tekutiny má místo „působení na dálku“, tj. pertubace se v tekutině z bodového zdroje okamžitě rozšíří do celého prostoru. Právě studium asymptotického chování ( $t \rightarrow \infty$ ) vzbuzuje zájem nejenom matematiků, ale je užitečné i z fyzikálního hlediska.

Nejprve uvážíme případ, kdy  $|\lambda - \omega_0| \geq \delta > 0$ . Po přechodu ke sférickému souřadnicovému systému pro  $\lambda = |\mathbf{x}|_* / |\mathbf{x}|$  dostáváme  $\lambda = (\alpha^2 \sin^2 \theta + \omega_0^2 \cos^2 \theta)^{1/2}$  a podmínka  $|\lambda - \omega_0| \geq \delta > 0$  má nyní tvar  $\theta \in \langle \delta_1, \pi - \delta_1 \rangle$ , kde  $\delta_1 > 0$  a závisí na  $\delta$ .

Přihlédneme-li ke standardním asymptotickým metodám (opět citujeme podle [29]), pro fundamentální řešení (13.113) při  $\omega_0 t \gg 1$  máme

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\pi \omega_0}{\sqrt{2\lambda|\omega_0^2 - \alpha^2|}} \frac{\sin(\lambda t - \pi/4)}{2\lambda|\mathbf{x}| \sin \theta \sqrt{\omega_0 t}} - \\
 &\quad - \frac{\pi}{\sqrt{2|\omega_0^2 - \alpha^2|}} \frac{\sin(\omega_0 t - \pi/4)}{2\pi^2|\mathbf{x}| \sin \theta \sqrt{\omega_0 t}} + \frac{\Delta(|\mathbf{x}|, \omega_0 t)}{|\mathbf{x}|(\omega_0 t)},
 \end{aligned} \tag{13.114}$$

jestliže  $|\lambda - \omega_0| \geq \delta > 0$ . Pro  $\Delta$  v (13.114) platí  $|\Delta(\mathbf{x}, \omega_0 t)| \leq C(\delta)$ , kde  $C(\delta)$  nabývá obecně neomezených hodnot při  $\delta \rightarrow 0$ .

Podle (13.114) pro velká  $t$  fundamentální řešení  $E(\mathbf{x}, t)$ , tj. perturbace odvíjející se od bodového zdroje, v oblasti  $|\lambda - \omega_0| \geq \delta$  (či  $\theta \in \langle \delta_1, \pi - \delta_1 \rangle$ ) klesá v čase jako funkce  $(\omega_0 t)^{-1/2}$  a skládá se z perturbací dvou typů. Prvou popisuje druhý sčítanec v (13.114) a odpovídá jí stojaté vlnění s oscilacemi o frekvenci  $\omega_0$ , které je v čase tlumeno. Druhou perturbací modeluje prvý sčítanec v (13.114) a představuje poněkud svérázný vlnový proces. Plochy stejné fáze těchto vln (hřebeny)  $\lambda = (\alpha^2 \sin^2 \theta + \omega_0^2 \cos^2 \theta)^{1/2} = \text{konst.} \cdot t^{-1}$  jsou kónické rotační plochy s vrcholem v bodě  $x = 0$  a s osou  $Ox_3$ .

Jestliže přepíšeme fázovou relaci při  $\omega_0 > \alpha$  do tvaru  $(\alpha^2 + (\omega_0^2 - \alpha^2) \cos^2 \theta)^{1/2} = \text{konst.} \cdot t^{-1}$  a v pro  $\omega_0 < \alpha$  je  $(\omega_0^2 + (\alpha^2 - \omega_0^2) \sin^2 \theta)^{1/2} = \text{konst.} \cdot t^{-1}$ , objeví se před námi následující obraz evoluce fázových kónických ploch:

Pokud  $\omega_0 > \alpha$ , tyto plochy vznikají poblíž osy  $Ox_3$ , v čase se postupně rozvírají a degenerují v horizontální rovinu  $x_3 = 0$ . Když  $\omega_0 > \alpha$ , je tomu právě naopak: fázové kónické plochy se objevují v horizontální rovině, v čase se postupně stlačují a degenerují ve vertikální souřadnicovou osu  $Ox_3$ . Z naznačeného geometrického obrazu evoluce zmíněných ploch docházíme k závěru, že vertikální osa  $Ox_3$ , odpovídající hodnotě  $\lambda = \omega_0$ , je vlastně množinou singulárních bodů systému fázových ploch. Z pohledu matematiky to značí, že asymptotický vztah (13.114) přestává platit.

Chování fundamentálního řešení na ose  $Ox_3$  popisuje výraz v druhém řádku (13.114). Odtud nahlédneme, že na ose  $Ox_3$  má fundamentální řešení tvar stojatých vln s frekvencí  $\omega_0$  v čase neklesající.

S přihlédnutím k poznatkům o fundamentálním řešení přistoupíme k formulaci řešení Cauchyho úlohy pro rovnici gravitačně setrvačných vln (13.96).

Zabývejme se úlohou

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0[u](\mathbf{x}, t) &= f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}); \end{aligned} \quad (13.115)$$

funkce  $u(\mathbf{x}, t)$  je regulární v nekonečnu (viz úlohy pro rovnici (13.98)). Požadujeme, aby  $u_0(\mathbf{x}), u_1(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  a  $f(\mathbf{x}, t) \in C^\infty[\mathbb{R}^3 \times \langle 0, \infty \rangle]$  necht' je finitní funkcí v proměnné  $\mathbf{x}$ .

**Teorém 7.** Za uvedených podmínek o funkcích  $u_0(\mathbf{x}), u_1(\mathbf{x})$  a  $f(\mathbf{x}, t)$  klasické řešení Cauchyho úlohy (13.115) existuje, je jediné a platí

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} E(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) f(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial t} E(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \Delta_3 u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\mathbb{R}^3} E(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \Delta_3 u_1(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.
\end{aligned} \tag{13.116}$$

Poznamenejme, že požadavky na hladkost a finitu počátečních hodnot funkcí v (13.115) mohou být značně omezeny.

Se znalostí explicitního řešení (13.116) Cauchyho úlohy můžeme posoudit otázku o existenci limitní amplitudy v tom případě, kdy funkce  $f(\mathbf{x}, t)$  na pravé straně rovnice (13.115) se v čase chová podle harmonického zákona.

Obrátme pozornost ke Cauchyho úloze ve tvaru

$$\mathbf{M}_0[u] = -(\omega^2 - \omega_0^2) f(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \tag{13.117}$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_t(\mathbf{x}, 0) = 0,$$

v němž je funkce  $u(\mathbf{x}, t)$  regulární v nekonečnu.

Zde je  $\omega \neq \omega_0$  a faktor  $(\omega^2 - \omega_0^2)$  na pravé straně (13.117) umožňuje výhodnější zápis následujících vztahů. Předpokládáme, že  $f(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

Pro každé  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  definujeme funkci  $w(\mathbf{x})$  zápisem

$$w(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(i\omega t) u(\mathbf{x}, t),$$

v němž je  $u(\mathbf{x}, t)$  řešení úlohy (13.117), kterému přisoudíme úlohu limitní amplitudy v (13.117). Na základě (13.116) řešení úlohy (13.117) lze zapsat ve tvaru

$$u(\mathbf{x}, t) = \exp(i\omega t) \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{y}) R(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) d\mathbf{y},$$

$$\text{kde } R(\mathbf{x}, t) = -(\omega^2 - \omega_0^2) \int_0^t E(\mathbf{x}, \tau) \exp(i\omega \tau) d\tau.$$

Teorém 8. Při  $\omega \neq \omega_0$  pro Cauchyho úlohu (13.117) existuje limitní amplituda  $w(\mathbf{x})$ , pro níž dostáváme

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} e(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

a která vyhovuje v klasickém smyslu rovnici

$$\Delta_2 w + \frac{\omega^2 - \alpha^2}{\omega^2 - \omega_0^2} w_{x_3 x_3} = f(\mathbf{x}). \quad (13.118)$$

Ve vztahu pro  $w(\mathbf{x})$  je  $e(\mathbf{x})$  fundamentální řešení rovnice (13.118). Funkce  $R(\mathbf{x}, t)$  téměř všude v  $\mathbb{R}^3$  pro  $t \rightarrow \infty$  konverguje k  $e(\mathbf{x})$ , tj. pro téměř všechna  $\mathbf{x}$  (ve smyslu lebesgueovské míry) v  $\mathbb{R}^3$  platí

$$e(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} R(\mathbf{x}, t).$$

Je třeba uvést, že rovnice (13.118) pro limitní amplitudu  $w(\mathbf{x})$  a frekvenci  $\omega$  neležící v intervalu  $\langle \min(\omega_0, \alpha); \max(\omega_0, \alpha) \rangle$ , je rovnicí eliptického typu a pro  $\omega$  z tohoto intervalu je rovnicí hyperbolickou. V obou případech fundamentální řešení (13.118) nabývá tvaru

$$e(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \left[ x_3^2 + \left( \frac{\omega^2 - \alpha^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) (x_1^2 + x_2^2) \right]^{-1/2}. \quad (13.119)$$

Avšak je na místě říci, že v případě hyperbolické rovnice v (13.119) vybíráme tu větev kořenu, pro níž  $(-\alpha^2)^{1/2} = -i\alpha$  pro  $\alpha > 0$ . Naším nejbližším úkolem je detailnější posouzení otázek, týkajících se typů rovnic pro amplitudy generujících se oscilací a jejich řešení.

Těžištěm našeho zájmu bude smíšená úloha pro dvojdimenzionální rovnici gravitačně setrvačných vln v Boussinesqově aproximaci:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_{\perp} u + \omega_0^2 u_{x_1 x_1} + \alpha^2 u_{x_3 x_3} = 0, \quad (13.120)$$

kde je  $\Delta_{\perp}$  Laplaceův operátor zapsaný v proměnných  $x_1$  a  $x_3$ .

Necht' v tekutině, jejíž dvojdimenzionální dynamika je popsána rovnicí (13.120), se nachází pro tekutinu nepropustná nekonečně tenká destička  $\Gamma$ , umístěná pro úhlem  $\varphi$  k ose  $Ox_1$ , tj.  $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = s \cos \varphi, x_3 = s \sin \varphi, s \in \langle -1, 1 \rangle; \varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle\}$ . Předpokládejme, že počínajíc  $t = 0$  body  $\Gamma$  vykonávají malé pohyby ve směru kolmém k destičce  $\Gamma$ . Takové pohyby lze popsat zadáním normálových rychlostí k  $\Gamma$  částic tekutiny na úseku  $\Gamma$ . Odtud dospíváme k následující matematické úloze o pertubaci vln v tekutině s kmitajícím úsekem  $\Gamma$ :

Pro  $t \geq 0$  a  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  hledáme spojitou funkci  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  a  $C_0(t)$  takové, aby funkce  $u(\mathbf{x}, t)$  pro  $t > 0$  vyhovovala v klasickém smyslu rovnici (13.120) v oblasti  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , splňovalo počáteční podmínky



$$u(\mathbf{x}, 0) = u_t(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (13.121)$$

a na úseku  $\Gamma$  platily okrajové podmínky

$$u(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in \Gamma} = f(s, t) + C_0(t), \quad s \in \langle -1, 1 \rangle. \quad (13.122)$$

Navíc požadujeme, aby funkce  $u(\mathbf{x}, t)$  ( $|\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_3^2)^{1/2}$ ) splňovala podmínky regularity v nekonečnu a také podmínky

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \nabla u \right| \sim O(r_{1,2}^{-1/2}), \quad k = 0, 1, 2 \quad (13.123)$$

v okolí koncových bodů  $\Gamma$ , kde  $r_{1,2}$  je jejich vzájemná vzdálenost.

Poznámka 24: podle způsobu zavedení funkce  $u(\mathbf{x}, t)$ , je  $u$  proudovou funkcí toku, je tedy zadanou až na libovolnou aditivní konstantu závisící na čase. Je to dáno začleněním konstanty  $C_0(t)$  v zápisu (13.123) a odtud plynoucí možnosti docílit volbou této konstanty jednoznačného řešení nás zajímající úlohy.

Označme nyní symbolem  $C_{1/2}^{(0,h)}(\Gamma)$  množinu funkcí  $\mu(s)$ ,  $s \in \langle -1, 1 \rangle$  na  $\Gamma$ , vyhovující ve vnitřních bodech  $\Gamma$  Hölderově podmínce s exponentem  $h$  a nikoliv nutně ohraničených v okolí koncových bodů  $\Gamma$ , kde platí odhad  $|\mu(s)| \leq C|1-s^2|^{-1/2}$ . Dále nechť je  $C_0^{(2)}[0, T; C_{1/2}^{(0,h)}(\Gamma)]$  množina funkcí

$$\left\{ \mu(s, t) \in C^{(2)}[0, T; C_{1/2}^{(0,h)}(\Gamma)] : \mu(s, 0) = \mu_t(s, 0) = 0, \int_{-1}^1 \mu(s, t) ds = 0 \right\}.$$

Poté platí:

Lemma 5. Jestliže  $\mu(s, t) \in C_0^{(2)}[0, \infty; C_{1/2}^{(0,h)}(\Gamma)]$ , funkce

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{-1}^1 \mu(s, t) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}(s)| ds + \int_0^t \int_{-1}^1 \mu(s, t - \tau) \frac{1}{\tau} \left[ 1 - \cos \left( \tau \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(s)|^*}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(s)|} \right) \right] ds d\tau, \quad (13.124)$$

kde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{y}(s) = (s \cos \varphi, s \sin \varphi)$ ,  $|\mathbf{x}|_* = (\alpha^2 x_1^2 + \omega_0^2 x_3^2)^{1/2}$  je spojitá v  $\mathbb{R}^2$ , vně  $\Gamma$  vyhovující rovnici (13.120), počátečním podmínkám (13.121) a rovněž podmínkám regularity v nekonečnu i podmínkám (13.123).

Uvážíme-li řešení úlohy ve tvaru (13.124), s přihlédnutím k okrajové podmínce (13.122), docházíme k následující integrální rovnici:

$$\int_{-1}^1 \mu(\sigma, t) \ln|s - \sigma| d\sigma = f(s, t) + C_0(t). \quad (13.125)$$

Vyslovme požadavek, aby  $f(s, t) \in C^{(2)}[0, \infty; C^{(1, h)}(\Gamma)]$  a  $f(s, 0) = f_t(s, 0) = 0$ . Tehdy řešení rovnice (13.125) ve třídě  $C_0^{(2)}[0, \infty; C_{1/2}^{(0, h)}(\Gamma)]$  existuje jen pro jisté  $C_0(t)$ , je jediné, má tvar

$$\mu(s, t) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-s} f'_\xi(\xi, t) d\xi \quad (13.126)$$

a pro  $C_0(t)$  dostáváme

$$C_0(t) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(s, t) ds + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu(s, t) \Omega(s) ds, \quad (13.127)$$

kde  $\Omega(s) = (1-s)\ln((1-s)/e) + (1+s)\ln((1+s)/e)$ . Poté platí:

**Teorém 9.** Pro libovolné  $f(s, t) \in C^{(2)}[0, \infty; C^{(1, h)}(\Gamma)]$  a  $f(s, 0) = f_t(s, 0) = 0$ , existuje řešení úlohy (13.120) až (13.123), je jediné a dané explicitními tvary (13.124) a (13.127) s funkcí  $\mu(s, t)$  určenou rovností (13.126).

Tvrzení o jednoznačnosti řešení v teorému 9 dokážeme pomocí energetické identity pro rovnici (13.120).

Přenesme dále naši pozornost na otázku o chování řešení nás zajímavější úlohy pro velká  $t$ . V tomto případě z (13.124), (13.126) a (13.123) dospíváme k dalšímu teorému:

**Teorém 10.** Jestliže funkce  $f(s, t)$  splňuje podmínky teorému 9 a je funkcí finitní v čase, tj. existuje  $t_0$  takové, že při  $t > t_0 > 0$  je  $f(s, t) \equiv 0$ , řešení úlohy (13.120) až (13.123) pro  $t \rightarrow \infty$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  stejnoměrně konverguje k nule (stabilizuje se) a pro rychlost stabilizace dostáváme

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma} |u(\mathbf{x}, t)| \leq C_f / t,$$

kde konstanta  $C_f$  závisí jen na  $f(s, t)$ .

Nechť  $f(s, t)$  v okrajové úloze (13.122) má tvar  $f(s, t) = \eta(t) \exp(-i\omega t) f_0(s)$  s funkcí  $\eta(t) \in C^{(2)}(0, \infty)$  „přechodného režimu“, vyhovující následujícím podmínkám. Při  $0 \leq t \leq t_0$  je funkce  $\eta(t)$  zcela libovolná s počáteční podmínkou  $\eta(0) = \eta_t(0) = 0$  a při  $t > t_0$  bude  $\eta(t) \equiv 1$ . Poté otázka o existenci limitní amplitudy pro úlohu (13.120) až (13.123) nás přivádí v pořadí již k jedenáctému teorému:

Teorém 11. Budiž  $f_0(s) \in C^{(1,h)}(\Gamma)$ . Tehdy při libovolném  $\omega \neq \omega_0, \alpha$  a  $(\alpha^2 \cos^2 \varphi + \omega_0^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$  pro úlohu (13.120) až (13.123) existuje limitní amplituda  $w(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(i\omega t)u(\mathbf{x}, t)$  ve tvaru

$$w(\mathbf{x}) = \int_{-1}^1 \mu_0(s) \ln \left[ (x_1 - y_1(s))^2 + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \alpha^2} (x_3 - y_3(s))^2 \right]^{1/2} ds. \quad (13.128)$$

Zde je  $\mu_0(s)$  funkce definovaná zápisem (13.126), v němž  $f'_\xi(\xi, t)$  nahradíme funkcí  $f'_0(\xi)$ . Větev logaritmu v (13.128) je dána vztahem mezi parametry  $\alpha$  a  $\omega_0$ . Pro  $z = 0$  máme  $\ln z = \ln|z|$  a když  $z < 0$ , platí  $\ln z = \ln|z| + i\pi \text{sign}(\omega_0 - \alpha)$ . Limitní amplituda  $w(\mathbf{x})$  všude v  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  vyhovuje rovnici

$$w_{x_3 x_3} + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \alpha^2} w_{x_1 x_1} = 0 \quad (13.129)$$

vytvářejících se oscilací; při  $\omega \notin \langle \min\{\omega_0, \alpha\}, \max\{\omega_0, \alpha\} \rangle$  splňuje tuto rovnici v klasickém smyslu a jestliže  $\min\{\omega_0, \alpha\} < \omega < \max\{\omega_0, \alpha\}$  pak ve smyslu teorie zobecněných funkcí. Kromě toho limitní amplituda vyhovuje na  $\Gamma$  okrajové podmínce  $w(\mathbf{x})|_\Gamma = f_0(s) + C_0$  s konstantou  $C_0$  danou vztahem (13.127), v němž je třeba  $\mu(\mathbf{s}, t)$  zaměnit funkcí  $\mu_0(s)$  a  $f(s, t)$  funkcí  $f_0(s)$ .

Po vyslovení teorému o existenci limitní amplitudy v případě úlohy (13.120) až (13.123) je třeba uvést několik poznámek. Jak vyplývá z teorému 11, řešení úlohy (13.120) až (13.123) v námi uvažovaném případě při  $t \rightarrow \infty$  popisuje ustanovující se oscilace o frekvenci  $\omega$  ( $\neq \omega_0, \alpha$  a  $(\alpha^2 \cos^2 \varphi + \omega_0^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$ ) s amplitudou  $w(\mathbf{x})$ , řešením rovnic (13.129). Pokud  $\omega \notin \langle \min\{\omega_0, \alpha\}, \max\{\omega_0, \alpha\} \rangle$ , (13.129) je standardní rovnicí klasické úlohy generujících se oscilací rovnicí eliptického typu.

Nás především zajímá případ  $\min\{\omega_0, \alpha\} < \omega < \max\{\omega_0, \alpha\}$ , kdy rovnice je hyperbolického typu a podává obraz svérázných vnitřních pohybů tekutiny. Jmenovitě, limitní amplituda (13.128) je nespojitou funkcí v  $\mathbb{R}^2$ , nicméně její první derivace mají význam složek vektoru rychlosti částic tekutiny, nabývajících neomezených hodnot v okolí přímk  $x_3 = \pm \sin \varphi \pm \pm a(x_1 \pm \cos \varphi)$  ( $a = ((\alpha^2 - \omega^2)/(\omega^2 - \omega_0^2))^{1/2}$ ), které jsou charakteristikami rovnice (13.129), procházejícími konci úseku  $\Gamma$ . Ukazuje se, že

$$|\nabla w| \sim C \left[ (x_3 \pm \sin \varphi)^2 - a^2 (x_1 \pm \cos \varphi)^2 \right]^{-1/4}$$

a tak se zde setkáváme s jevem, který je v [28, 29] označen jako „expanze“ podél charakteristik v okolí koncových bodů  $\Gamma$ .

V teorému 11 nebyl brán zřetel na případy  $\omega = \alpha$ ,  $\omega_0$  a  $(\alpha^2 \cos^2 \varphi + \omega_0^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$ . Tehdy hovoříme o singularitách úlohy týkající se limitní amplitudy. Není naším záměrem zde posuzovat příčiny, mající za následek vznik této situace, a to jak z matematického, tak i fyzikálního pohledu. Toliko si řekněme, že při  $\omega = \alpha$  a  $\omega = \omega_0$  rovnice (13.129) má tvar  $u_{x_1, x_2} = 0$  či  $u_{x_3, x_3} = 0$ , který sebou přináší řadu matematických obtíží.

Poznamenejme při této příležitosti, že ve fyzikálně zajímavém případě, kdy úsek  $\Gamma$  osciluje jako celek (tehdy  $f'_0(s) \equiv 1$ ), lze spočítat hodnotu limitní amplitudy v explicitním tvaru, a to jen pomocí elementárních funkcí. Abychom se o tom přesvědčili, je třeba říci, že při  $f'_0(s) \equiv 1$  pro hustotu  $\mu_0(s)$  dostáváme

$$\mu_0(s) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-s^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-s} d\xi = -\frac{s}{\pi \sqrt{1-s^2}} = \frac{1}{\pi} \frac{d}{ds} \sqrt{1-s^2}.$$

Po dosazení  $\mu_0(s)$  do (13.128) a integraci máme možnost dále pracovat s integrálem typu Cauchyho, který lze spočítat pomocí známých metod teorie funkce komplexní proměnné. Nebudeme se zde pouštět do podrobností a všimněme si na tomto místě jen konečných výrazů.

Nejprve nás bude zajímat, kdy  $\omega < \min\{\alpha, \omega_0\}$  či  $\omega > \max\{\alpha, \omega_0\}$ . Tehdy rovnice (13.129) je eliptického typu. Při volbě

$$z_b^\pm = \frac{bx_1 \pm ix_3}{b \cos \varphi \pm i \sin \varphi},$$

$$b = \left[ \frac{\omega^2 - \alpha^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right]^{1/2}$$

pro limitní amplitudu máme

$$w(\mathbf{x}) = -(i/2) \left\{ \sqrt{1-(z_b^-)^2} + iz_b^- + \sqrt{1-(z_b^+)^2} + iz_b^+ \right\}.$$

Větev kořenu  $\sqrt{1-z^2}$  zde vybíráme následujícím způsobem: rozvětovací body  $z = \pm 1$  jsou spojeny řezem, kterým je úsek reálné osy  $z$  a na horním dílu řezu  $\sqrt{1-z^2} = 1$  při  $z = 0$ .

Dále uvažme případ, kdy  $\min\{\alpha, \omega_0\} < \omega < \max\{\alpha, \omega_0\}$  a rovnice (13.129) je hyperbolického typu. Položme

$$z_a^\pm = \frac{ax_1 + x_3}{a \cos \varphi \pm \sin \varphi}, \quad a = \left[ \frac{\alpha^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right]^{1/2}$$

a pro určitost požadujeme, aby  $\omega_0 > \alpha$  a  $\cos \varphi - \sin \varphi > 0$ . Charakteristiky rovnice (13.129) procházející bodem  $\mathbf{x}(1) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$  úseku  $\Gamma$  mohou být nyní zapsány ve tvaru rovností  $z_a^+ = 1, z_a^- = 1$  a pro  $\mathbf{x}(-1) = (-\cos \varphi, -\sin \varphi)$  dostáváme  $z_a^+ = -1, z_a^- = -1$  (viz obr. 13.11). Tyto charakteristiky rozdělují  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  na oblasti označené na tomto obrázku číslicemi I až VIII, a rovněž na dva trojúhelníky  $ABC$  a  $ACD$ . Poté pro limitní amplitudu  $w(\mathbf{x})$  dostáváme

$$w(\mathbf{x}) = (z_a^+ + z_a^-) / 2 + 1/2 \left\{ \chi_1 \left[ 1 - (z_a^+)^2 \right]^{1/2} + \chi_2 \left[ 1 - (z_a^-)^2 \right]^{1/2} \right\},$$

kde veličina  $\boldsymbol{\chi} = (\chi_1, \chi_2)$  závisí na poloze bodu  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \text{obl. I, } \boldsymbol{\chi} &= (1, 1); \quad \mathbf{x} \in \text{obl. VI, } \boldsymbol{\chi} = (-i, -1), \\ \mathbf{x} \in \text{obl. II, } \boldsymbol{\chi} &= (i, 1); \quad \mathbf{x} \in \text{obl. VII, } \boldsymbol{\chi} = (1, -1), \\ \mathbf{x} \in \text{obl. III, } \boldsymbol{\chi} &= (-1, 1); \quad \mathbf{x} \in \text{obl. VIII, } \boldsymbol{\chi} = (1, i), \\ \mathbf{x} \in \text{obl. IV, } \boldsymbol{\chi} &= (-1, -i); \quad \mathbf{x} \in \Delta ABC, \boldsymbol{\chi} = (i, -i), \\ \mathbf{x} \in \text{obl. V, } \boldsymbol{\chi} &= (-1, -1); \quad \mathbf{x} \in \Delta ACD, \boldsymbol{\chi} = (-i, i). \end{aligned}$$

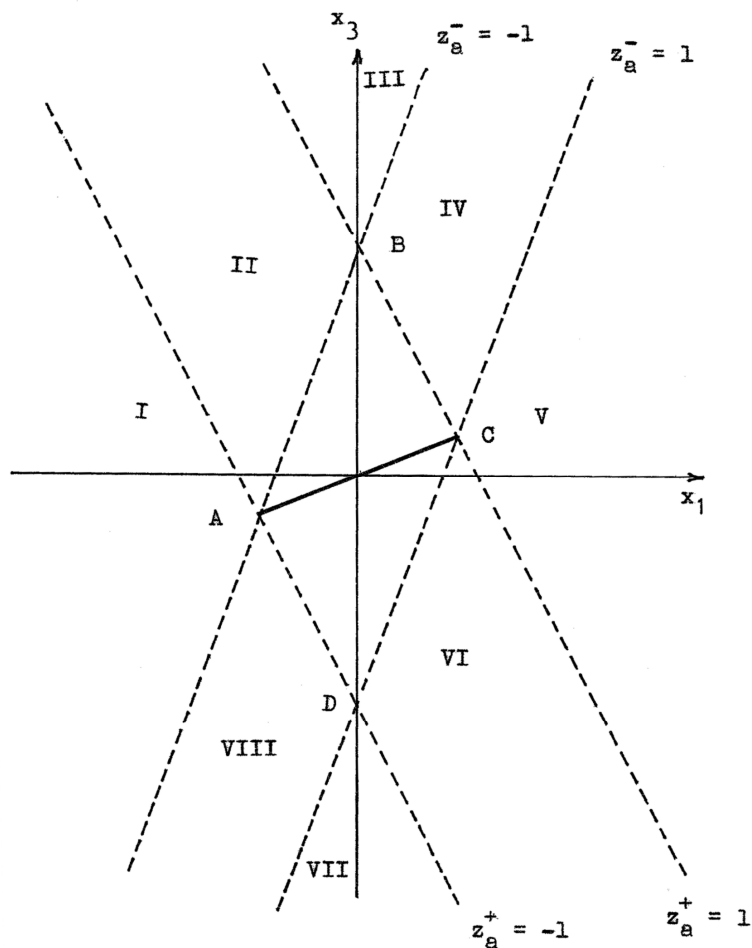
Na základě těchto vztahů se můžeme přesvědčit, že limitní amplituda v oblastech I, III, V a VII klesá jako  $O(\rho^{-1})$ , kde je  $\rho$  vzdálenost od nejbližší charakteristiky  $z_a^\pm = \pm 1$ . Pro oblasti II, IV, VI a VIII platí odhad  $|w| = 1/2 + O(|\mathbf{x}|^{-1})$ .

Kapitolu věnovanou matematickým úlohám dynamiky stratifikované tekutiny zakončíme statí o vznikajících vlnových pohybech ve stratifikované rotující a stlačitelné tekutině a podáme jejich klasifikaci. Získáme ji porovnáním typů rovnic pro amplitudy generujících se vln a charakteru fundamentálních řešení v úvahu připadajících rovnic.

Dochází-li v tekutině k oscilacím, funkce  $u(\mathbf{x}, t)$  se v čase chová podle zákona  $\exp(-i\omega t)$ , tj.  $u(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)$ , kde amplituda  $u(\mathbf{x})$  vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} u + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \alpha^2} \Delta_2 u - \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) u = 0, \quad (13.130)$$

kteřou získáme z rovnice (13.94) s přihlédnutím k (13.95). Při analýze rovnice (13.130) nebudeme věnovat pozornost případu, kde  $\omega = \omega_0, \alpha$ .



Obr. 13.11 Rozklad množiny  $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$  na oblasti s různou limitní amplitudou  $w(\mathbf{x})$  [29].

Označme  $a^2$  a  $\chi^2$  tyto veličiny:

$$\frac{1}{a^2} = \left| \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \alpha^2} \right| \quad \text{a} \quad \chi^2 = \left| \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right|.$$

Přihlédneme-li ke vztahům mezi parametry v koeficientech rovnice (13.130), tuto rovnici lze zapsat v jednom z následujících čtyř tvarů:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{1}{a^2} \Delta_2 u + \chi^2 u = 0, \quad (13.131)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{1}{a^2} \Delta_2 u - \chi^2 u = 0, \quad (13.132)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{1}{a^2} \Delta_2 u - \chi^2 u = 0, \quad (13.133)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{1}{a^2} \Delta_2 u + \chi^2 u = 0, \quad (13.134)$$

kteř přicházejí v úvahu při určitých hodnotách parametrů  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $\alpha$  a  $\beta c$  (viz dále). Mějme stále na zřeteli, že  $\omega_0^2 = 2\beta g - g^2/c^2 \leq \beta^2 c^2$ , neboť  $\beta^2 c^2 - 2\beta g + g^2/c^2 = (\beta c - g/c)^2 \geq 0$ . Další úvahy se budou vztahovat k případům akustických vln, povrchových vln (jejich „nositel“ je velmi tenká vrstva elastického prostředí přiléhající k rozhraní; tyto vlny sahají jen nepatrně pod povrch prostředí) a ve dvou případech k vnitřním vlnám, označovaných v [29] jako hyperbolické vlny dvou různých tříd.

1. Akustické vlny. Vlnové procesy zde popisuje rovnice (13.131), a to tehdy, když  $\omega > \max(\beta c, \alpha)$ . Vytvářející se vlny přičítáme na vrub stlačitelnosti tekutiny, tj. konečné rychlosti zvuku  $c$  v tekutině. Jestliže  $c \rightarrow \infty$ , půjde o nestlačitelnou kapalinu a rovnice (13.130) v závislosti na hodnotách parametrů  $\omega$ ,  $\omega_0|_{c=\infty} = 2\beta g$  a  $c$ , může nabývat tvaru (13.132) i (13.134). Tím chceme naznačit, že vlny vytvářející se v nestlačitelné tekutině při žádných hodnotách parametrů nemůže popisovat rovnice (13.131). Naproti tomu, při  $\omega_0 = 0$  a  $\alpha = 0$  v nestratifikované a nerotující tekutině zachovává rovnice (13.131) svůj tvar pro  $a^2 = 1$  a  $\chi^2 = \omega^2/c^2$  a je klasickou rovnicí akustiky.

Fundamentálním řešením (13.131) je funkce

$$E_1(\mathbf{x}) = -(a^2/4\pi) \exp(i\chi R(\mathbf{x}))/R(\mathbf{x}),$$

kde  $R(\mathbf{x}) = (a^2 x_1^2 + a^2 x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ . Protože takové řešení interpretujeme jako řešení popisující vlnový proces generovaný bodovým zdrojem, tvrdíme, že se zde na rozdíl od klasického případu nešíří od bodového zdroje sférické vlny, ale vlny, které lze označit jako eliptické. Tehdy je plochou stejných fází či hřebenů vln elipsoid, jehož tvar se mění v závislosti na parametru  $a$ .

2. Povrchové vlny. K tomu případu dochází, pokud parametry v (13.130) vyhovují jednomu ze vztahů

$$\beta c \geq \omega > \max(\omega_0, \alpha), \omega < \min(\omega_0, \alpha) \quad (13.135)$$

a je popsán rovnicí (13.132).

Avšak je nezbytně nutné říci, že principiálně právě tato rovnice vlastně nemůže popisovat vlnový proces. Ukazuje na to i explicitní tvar jejího řešení

$$E_2(\mathbf{x}) = -(a^2 / 4\pi) \exp(-\chi R(\mathbf{x})) / R(\mathbf{x}).$$

Již proto je třeba tento výrok upřesnit. Víme, že pokud oblast vyplněná tekutinou není celým prostorem  $\mathbf{R}^3$  a tedy je oblastí s jistou okrajovou plochou  $\Gamma$ , pak při splnění určitých okrajových podmínek na  $\Gamma$  může docházet k tvorbě právě povrchových vln. Tyto vlny se šíří podél plochy a dochází k jejich útlumu (exponenciálně) při rostoucích vzdálenostech od  $\Gamma$ . Uveďme si příklad, který je ilustrací tohoto tvrzení. Necht' stratifikovaná rotující stlačitelná tekutina popsána rovnicí (13.132) zaujímá poloprostor  $\mathbf{R}_-^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 : x_3 < 0\}$  a na hraniční ploše  $x_3 = 0$  platí (viz základní okrajové a počáteční úlohy  $\partial p / \partial t - \rho_0(x_3)g(\mathbf{n}, \mathbf{v})|_{x_3=\eta(x_1, x_2)} = 0$ ). S přihlédnutím k (13.92) a se zřetelem na časovou závislost  $\exp(-i\omega t)$  v termínech funkce  $u(\mathbf{x})$  má okrajová podmínka tvar

$$\partial u / \partial x_3 + (\beta - \omega^2 / g)u|_{x_3=0} = 0. \quad (13.136)$$

Můžeme se přesvědčit, že při splnění první z nerovností (13.135) s ohledem na (13.136) má rovnice (13.132) partikulární řešení

$$u = A \exp(\mu x_3 \pm i a x_1 (\mu^2 - \chi^2)^{1/2}), \quad (13.137)$$

kde  $\mu = -\beta + \omega^2 / g$ . Odpovídající řešení pro vektor rychlosti částic tekutiny (13.137) dostáváme ve tvaru

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(A, \mu, \chi) \exp((\omega^2 / g)x_3 \pm i a x_1 (\mu^2 - \chi^2)^{1/2}); \quad (13.138)$$

$\mathbf{v}(A, \mu, \chi)$  je vektor amplitudy. Výrazu (13.138) odpovídají povrchové vlny, exponenciálně se tlumící v hloubkách tekutiny. A tak, vyhovíme-li jedné z nerovností (13.135), může docházet ve stratifikované rotující tekutině toliko k generaci povrchových vln.

3. Vnitřní vlny „třídy  $h_1$ “. Předpokládejme, že parametry rovnice (13.130) splňují systém nerovností

$$\min(\alpha, \omega_0) < \omega < \max(\alpha, \omega_0), \quad \omega < \beta c.$$

Poté tato rovnice nabývá tvaru (13.133). Právě tato rovnice spolu s (13.134) budí náš zájem; jsou to rovnice hyperbolického a nikoliv eliptického typu, na který jsme zvyklí v klasických úlohách teorie generujících se oscilací.



Zájem je podnícen nejenom typem rovnice, ale rovněž fyzikálními důsledky s názornými projevy vlivů stratifikace a rotace na chování vytvářejících se oscilací v tekutině blízké nestlačitelnému prostředí.

Abychom poznali charakter vlnových procesů popsaných rovnicí (13.133), všimněme si jejího fundamentálního řešení:

$$E_3(\mathbf{x}) = (i a^2 / 4\pi) [\exp(i \chi R_*(\mathbf{x}))] / R_*(\mathbf{x}), \quad (13.139)$$

kde

$$R_*(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sqrt{a^2(x_1^2 + x_2^2) - x_3^2} & \text{při } |x_3| \leq a\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ i\sqrt{x_3^2 - a^2(x_1^2 + x_2^2)} & \text{při } |x_3| \geq a\sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \end{cases}$$

Řešení  $E_3(\mathbf{x})$  odpovídá podmínkám radiace v tom smyslu, že popisuje vlny přenášející energii do nekonečna. Přesvědčíme se o tom tak, že stanovíme vektor hustoty toku energie  $\mathbf{\Pi} = \text{Re}(p\mathbf{v})$ , kde  $\text{Re}$  značí reálnou část příslušného argumentu, toku odpovídajícího fundamentálnímu řešení  $E_3(\mathbf{x})$ .

Poznámka 25: vektor hustoty toku energie určíme z lokálního zákona zachování energie

$$\partial \varepsilon / \partial t + \text{div } \mathbf{\Pi} = 0,$$

kde je  $\varepsilon$  hustota energie. Pro systém (13.90) veličiny  $\varepsilon$  a  $\mathbf{\Pi}$  udávají vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} &= p\mathbf{v}, \quad \varepsilon = (1/2)\rho_0|\mathbf{v}|^2 + (g/2\rho_0\omega_0^2c^2)U(p, \rho_1), \\ U(p, \rho_1) &= (|\rho_0'|/\rho_0)p^2 - 2gp\rho_1 + gc^2\rho_1^2. \end{aligned}$$

Dále mějme na zřeteli charakteristický kužel  $K$  rovnice (13.133), tj.  $K \equiv \{(x_1, x_2, x_3) : x_3^2 \leq a^2(x_1^2 + x_2^2)\}$  a zajímejme se o některé charakteristické vlastnosti vln s fundamentálním řešením rovnice (13.133).

Kužel  $K$  dělí prostor  $\mathbf{R}^3$  na dva podprostory s rozdílnými vlnovými pohyby. První podprostor je sjednocením dutin kuželu, tj. množinou bodů  $\{\mathbf{x} : x_3^2 > a^2(x_1^2 + x_2^2)\}$ . Podle (13.139) se v tomto podprostoru neseťkáváme s vlnovými pohyby – amplituda oscilací rychle klesá se vzdáleností od počátku souřadnicového systému. Tok energie je nulový, k transportu energie bodového zdroje nedochází. Protikladem je amplituda oscilací v okolí povrchu kuželu  $K$ . Ta zde neomezeně vzrůstá tím více, čím blíže je k povrchu  $K$  vně jeho vrcholu. Děje se tak podle závislosti  $r_1^{-1/2}$ , kde  $r_1 = \rho(\mathbf{x}, K)$  je vzdálenost od povrchu kuželu. V okolí jeho vrcholu roste amplituda oscilací jako  $r^{-1}$  ( $r = |\mathbf{x}|$ ).

Nyní se zaměříme na oblast vně kuželu  $K$ . Dochází zde k svérázným vlnovým pohybům se zajímavými a neobyčejnými plochami stejných fází (hřebeny vln). Tvoří je třída rotačních jednodílných hyperboloidů s asymptotickým kuželem, k němuž plochy směřují (jednodílný hyperboloid má vnitřní asymptotický kužel). Generující se vlny s takovými plochami stejných fází budeme nazývat hyperbolickými vlnami třídy  $h_1$  (terminologie je převzata z [29]). V nás zajímavícím případě zejména tyto vlny přenášejí energii až do nekonečna a přitom jejich amplituda klesá jako  $|\mathbf{x}|^{-1}$ .

4. Vnitřní vlny „třídy  $h_2$ “. Z matematického hlediska je k (13.133) velmi blízká rovnice (13.134), k níž dospíváme z (13.130) volbou parametru

$$\omega_0 < \beta c < \omega < \alpha.$$

Jak jsme již podotkli, rovnice (13.134) je rovnicí hyperbolického typu. Její fundamentální řešení má tvar

$$E_4(\mathbf{x}) = -(i a^2 / 4\pi) \exp(-\chi \bar{R}_*(\mathbf{x})) / \bar{R}_*(\mathbf{x}),$$

kde pro  $R_*(\mathbf{x})$  platí (13.139) a pruh nad  $R_*(\mathbf{x})$  značí veličinu komplexně sdruženou.

Jako dříve zavedme charakteristický kužel  $K$  a popišme obraz vlnových pohybů, šířících se od bodového zdroje, popsaného fundamentálním řešením  $E_4(\mathbf{x})$ . Ukazuje se, že v tomto případě obraz vlnového procesu bude v jistém smyslu opačný k tomu, který jsme popsali dříve. Jmenovitě, v oblasti vně vnitřku  $K$  vlnový pohyb vymizí – amplituda oscilací exponenciálně klesá se vzdáleností od počátku souřadnicového systému. A naopak, v dutině  $K$  dochází ke generaci vlnových pohybů s plochami stejné fáze tvořícími třídu dvojdílných rotačních hyperboloidů s asymptotickou plochou danou kuželem  $K$ . Takové vlny nazvěme hyperbolickými vlnami „třídy  $h_2$ “. Stejně jako dříve, dochází k přenosu energie bodového zdroje do nekonečna s úbytkem amplitudy jako  $|\mathbf{x}|^{-1}$ . Opět je kužel  $K$  nositelem singularit fundamentálního řešení  $E_4(\mathbf{x})$ .

Úhrnem můžeme říci, že v závislosti na hodnotách veličin parametrizujících stratifikovanou rotující stlačitelnou tekutinu dochází k podstatně různým matematickým i fyzikálním situacím. V posledních dvou případech jsme se setkali s rovnicemi hyperbolického typu. To nás přivádí k novým netradičním formulacím úloh, k okrajovým úlohám pro hyperbolické rovnice. O tom, s jakými zvláštnostmi se přitom setkáváme a k jakým výsledkům tehdy docházíme, máme možnost se přesvědčit na příkladech difrakce ustavujících se hyperbolických vln „třídy  $h_1$ “ v stratifikované tekutině [29].

## 13.12 Tichonovovy systémy. Pomalá a rychlá dynamika

Definici těchto systémů podáme ve tvaru, v němž je uvedena v [30]. Vyjděme z rovnice autonomní dynamiky  $\dot{x} = f(x, u)$  a interpretujeme ji tak, že  $x$  popisuje „vnitřní stavy“ jistého objektu (systému) za okolností charakterizovaných veličinou  $u$ . Nyní veličinu  $u$ , která vystupovala jako parametr, pojme jako proměnnou veličinu, přičemž její změny se řídí diferenciální rovnicí tvaru  $\dot{u} = g(x, u)$ . Na autonomní dynamice veličiny  $u$  je nejpodstatnější, že „dává pohyb“ útvaru, např. přechodovému metabolickému systému, který sám obsahuje teprve možnost pohybu; to, že jde o diferenciální rovnici, není tak důležité. Podstatná je též „autonomnost“ dynamiky. To znamená, že možné pohyby jsou pevně určovány lokální situací v jednotlivých bodech prostoru.

Vyjdeme-li nyní ze soustavy  $f: B \rightarrow V(M)$ , kde  $B$  je jistá oblast prostoru  $\mathbb{R}^n$  a  $V(M)$  prostor všech hladkých vektorových polí na  $M$  (je-li  $M \subset \mathbb{R}^n$ , jde vlastně o prostor všech hladkých  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ), dostáváme dvojici  $(f, g)$ , kterou lze chápat jako hladké vektorové pole na  $B \times M$ . Uvážíme-li dále soustavu  $\tilde{f}$ , tj. soustavu  $f$  určenou „až na vynásobení kladným činitelem“, dostáváme dvojici  $(\tilde{f}, g)$ , již lze chápat jako Tichonovův systém. Pak  $g$  se v těchto případech často nazývá pomalou dynamikou (autonomní dynamikou), pole  $f$  rychlou dynamikou. Důvod tohoto pojmenování je v tom, že v důležitých případech je  $g$  skutečně „pomalé“ vůči  $f$ ; v tomto případě řešení soustavy  $\dot{x} = f, \dot{u} = g$  a řešení příslušného Tichonovova systému jsou si (za jistých předpokladů) blízké a jedno může sloužit jako aproximace druhého. Tichonovovy systémy lze získat ze soustav polí (určených „až na kladného činitele“) přidáním pomalé dynamiky. Asi nejdůležitější je to, že tyto systémy zprostředkují aproximaci přechodového metabolického systému pomocí řešení soustavy diferenciálních rovnic.

O metabolismu zde hovoříme ve smyslu jisté zákonitosti, která každé hodnotě parametru, pro níž je to možné, přiřazuje určité ustálené chování, jež se uskutečňuje za podmínek a okolností popsanych touto hodnotou. Přesná definice je tato: metabolický model (v Thomově smyslu) je soustava polí  $f: B \rightarrow V(M)$  spolu se zobrazením  $\sigma$ , jež každému  $u \in B$  pro něž pole  $x \rightarrow f(x, u)$  má alespoň jeden atraktor, přisuzujeme jeden z těchto atraktorů; takovému zobrazení budeme říkat „výběr atraktorů“. Jde o popis velice široký, zejména proto, že zmíněné zobrazení  $\sigma$  není vlastně jako celek žádným způsobem vázáno na  $f$ , a pouze jeho jednotlivé hodnoty jsou určeny pomocí jednotlivých polí  $x \rightarrow f(x, u)$ . Skutečně důležité jsou jen ty metabolické modely, jež jsou v jistém smyslu stabilní. Obvykle se pole  $f$

považuje za stabilní, jestliže každé dostatečně blízké pole  $f_1$  je s ním v určitém smyslu ekvivalentní. „Dostatečně blízké“ se nejčastěji chápe ve smyslu topologie prostoru  $V(M)$ . V tomto případě máme:  $f$  je stabilní, jestliže má takové okolí  $U$  v prostoru  $V(M)$ , že každé  $f_1 \in U$  je ekvivalentní s  $f$  (v určitém smyslu, jenž je specifikován). Ekvivalence se chápe různě, pro ilustraci uvedeme tuto verzi: pole  $f$  na  $M$  a pole  $f_1$  na  $M_1$  jsou ekvivalentní, jestliže existuje difeomorfismus  $\varphi: M \rightarrow M_1$ , jenž převádí řešení rovnice  $\dot{x} = f(x)$  v řešení rovnice  $\dot{y} = f_1(y)$ . Příklad: pole  $x \mapsto -x$  na  $\mathbf{R}^n$  je stabilní, pole  $x \mapsto -x^3$  na  $\mathbf{R}^1$  není stabilní, neboť pole  $x \mapsto -x^3$  má jeden atraktor a každé pole  $x \mapsto -x^3 + \varepsilon x$ , kde  $\varepsilon > 0$ , má dva atraktory.

Protože se čtenář této publikace v ní dosud nesešel s pojmem „atraktor“, na tomto místě podáme jeho definici, sledující textovou souvislost.

Mějme dānu rovnici  $\dot{x} = f(x, u)$ , kde je  $u$  parametr a necht'  $\Phi_f$  je její tzv. obecné řešení, tj. zobrazení  $\Phi_f: U \rightarrow M$ , kde  $U \subset B \times M \times \mathbf{R}^1$ ,  $B$  je varieta a pro  $u \in B$ ,  $x \in M$  platí o  $t \mapsto \Phi(x, u, t)$ , že je definováno pro  $t$  z jistého otevřeného intervalu, je na něm řešení zmíněné rovnice a nedá se rozšířit (jako řešení) na větší otevřený interval. Obvykle mlčky předpokládáme, že tímto intervalem je celé  $\mathbf{R}^1$ . Množiny tvaru  $\{\Phi(x, u, t) : t \geq \tau\}$ , příp.  $\{\Phi(x, u, t) : t \leq \tau\}$  budeme nazývat  $\omega$ -polotrajektorii, příp.  $\alpha$ -polotrajektorii (příslušnými k  $u \in B$ ,  $x \in M$ ,  $\tau \in \mathbf{R}^1$ ). Označme průnik uzávěrů všech  $\omega$ -polotrajektorií symbolem  $\omega(x)$  a obdobně  $\alpha(x)$ . Body  $y \in \omega(x)$ , příp.  $y \in \alpha(x)$  nazýváme  $\omega$ -body, příp.  $\alpha$ -body řešení  $t \mapsto \varphi_f(x, t)$ . Množinu  $X \subset M$  nazýváme invariantní (vzhledem k poli  $f$ ), jestliže  $x \in X$ ,  $t \geq 0 \Rightarrow \Phi_f(x, t) \in X$ . Atraktorem pole  $f$  nazýváme neprázdnou uzavřenou množinu  $A \subset M$  takovou, že 1.  $A$  je invariantní; 2. Existuje otevřená množina  $U \supset A$  taková, že  $x \in U \Rightarrow \omega(x) \subset A$ ; 3. Když  $\alpha(x) \cap A \neq \emptyset$ , pak  $\Phi(x, t) \subset A$  pro všechna  $t \in \mathbf{R}^1$ ; 4. Když  $\Phi \neq W \subset A$ ,  $W$  je otevřená v  $A$ , pak existuje  $x \in W$  tak, že  $\omega(x) = A$ , tj. každá  $\omega$ -polotrajektorie procházející bodem  $x$  je hustá v  $A$ . Ustálené chování můžeme definovat např. jako soubor těch řešení  $\Phi(x, u, t)$ , která probíhají v daném traktoru pole  $f(x, u)$  a vyplňují jej hustě.

Poznámka 26: v geofyzikální hydrodynamice se s Tichonovovými systémy setkáme např. při popisu mechanismu generace a ustavení velkoperiodických oscilací na modelu atmosféry (se započítáním orografie), chápaným jako soubor vzájemně mezi sebou působících nelineárních oscilátorů. Amplitudy oscilací jsou pomalými proměnnými, jejich fáze rychlými proměnnými [21].

## ZÁVĚREČNÉ POZNÁMKY

Zabývat se v hydrodynamice aproximací výchozích prognostických rovnic (disipace energie jim dává charakter parabolických rovnic) v našem případě znamená vytvářet jejich konečnědimenzionální modely při zachování matematických i fyzikálních rysů těchto rovnic. Problémy hydrodynamiky nevidíme jen v řešení jednotlivých případů. V širších souvislostech je chápeme jako nedílnou součást uplatňování metod nelineární mechaniky v řadě fundamentálních chování fyzikálních systémů a obecněji chování neživé přírody. Není pochyb, že přitom dochází k opětovnému srůstání teoretické fyziky a matematiky. Jsme svědky toho, jak matematické formulace hluboce poznamenávají terminologii soudobých přírodních věd, včetně věd o Zemi. Dokládají to i výsledky, zahrnuté do této knihy. K roztržce mezi matematiky a fyziky a k oddělení od jiných věd došlo na začátku minulého století. Podle Arnolda to byl sebezničující demokratický princip, zvláště u Hilberta, podle něhož mají všechny axiomatické systémy stejná práva na to, aby byly analyzovány. Hodnota matematického výsledku je podle tohoto principu určována nikoli jeho významem a užitečností, ale pouze jeho obtížností<sup>\*)</sup>.

Jsou to právě nelineární systémy hydrodynamického typu, nabývající na významu i v mnoha úlohách matematické teorie klimatu. Předpokládáme, že evoluce klimatického systému je determinovaná a modelem klimatu je nekonečnědimenzionální disipativní systém. Tato problematika úzce souvisí také se studiem otázek o atraktoru rovnice vorticity na rotující kulové ploše. Tím vlastně přecházíme do problematiky těchto rovnic a do otázek predikce chování barotropní atmosféry při působení vnějších perturbací a její možné

---

<sup>\*)</sup> Hilbert se pokusil ukázat, že každý teorém může být odvozen pomocí logických kroků z postulátů daného axiomatického systému. Hilbertův formalismus utrpěl těžkou ránu, když rakouský logik Gödel publikoval svoji slavnou větu o neúplnosti. Dokázal v ní, že každá, dostatečně bohatá, bezesporná a rekurzivně axiomatická teorie je neúplná. Práce Caludeho a dalších jde ve svých tvrzeních ještě dál, když praví, že – v celkovém obecném topologickém smyslu – neúplnost je obvyklý jev: vzhledem k libovolné rozumné topologii je množina pravdivých a nedokazatelných výroků hustá v množině všech výroků.

nestabilitě. Z hlediska matematiky klimatu (mathematics of climate modeling), chápající studie o klimatických systémech jako součást kvalitativní teorie parciálních diferenciálních rovnic, prioritním úkolem je vyhledání operátoru odezvy klimatického modelu na vnější perturbace.

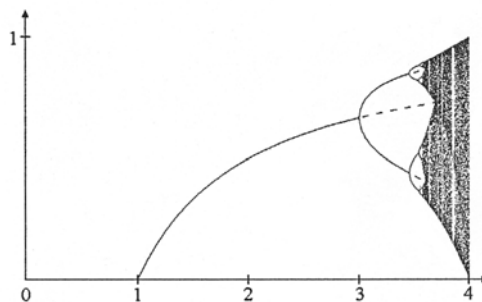
Chceme-li v souhrnu vytipovat některé hlavní směry v nelineární analýze atmosférických jevů, jimž je třeba se v budoucnu věnovat, je na místě říci, že soustavnou pozornost si zaslouží směry, vytýčené již v nelineární analýze: 1. Studium dynamických systémů s důrazem na asymptotické chování řešení; 2. Teorie singularit (bifurkace, katastrofy); 3. Geometrizace nelineární analýzy; 4. Účinné numerické metody řešení nelineárních úloh.

S výjimkou bodů 2 a 4 jsme zbývající dva směry sledovali na příkladech nelineárních systémů hydrodynamického typu, kde jsme se snažili o ucelenější pohled na konečnědimenzionální aproximace výchozích parciálních diferenciálních rovnic mechaniky tekutin. Přitom jsme se dostávali do oblastí některých speciálních odvětví matematiky (jako jsou například teorie reprezentací grup a zobecněných systémů Hamiltonovy dynamiky). Hledání účinných metod řešení nelineárních úloh je věcí spíše numerických matematiků, tíhnoucích ke konkrétním technickým aplikacím matematiky.

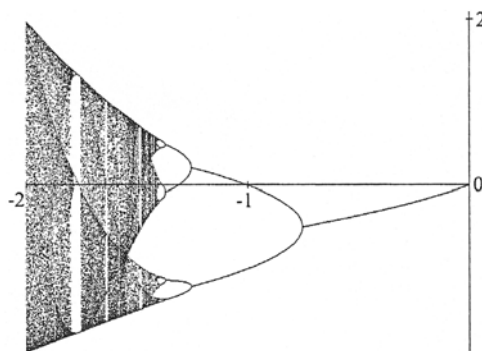
Teorie singularit, jejíž spojení s teorií bifurkací volněji chápeme jako teorii katastrof, datujeme Whitneyho práci o singularitách zobrazení roviny do roviny. „Skoro všechny“ singulární body zobrazení roviny do roviny jsou přehyby (cusps) nebo záhyby (folds) a každá jiná singularita se při vhodné libovolné změně na ně rozpadá. V geofyzikální hydrodynamice se můžeme setkat se singularitami typu Whitneyho při analýze matematického modelu horizontálně baroklinní atmosféry v tzv.  $\beta$ -aproximaci (beta plane approximation). V zobecněném prostoru parametrů a fázových souřadnic spojujeme s Whitneyho záhybem mechanismus vzniku intermitence při nelineární interakci planetárních atmosférických vln se zonálními toky. Intermitenci rozumíme nepravidelné střídání laminární a turbulentní fáze v režimech atmosférické cirkulace.

Obdobně jako u jiných dynamických systémů také v matematických modelech atmosférických jevů může nabývat důležitosti problém rozvětvení řešení pro rovnice (obecněji i nerovnice). Tehdy postupnou bifurkací přes zdvojování frekvence dochází k chaotickému chování. S tímto fenoménem se setkáváme např. v kvazigeostrofickém modelu atmosféry idealizované dvěma nemísícími se vrstvami tekutiny, v nichž charakteristiky proudění nezávisí na výškové souřadnici. Kvalitativní analýzu tohoto modelu provedl poprvé Lorenz. Byla zde zjištěna shoda mezi bifurkačním diagramem tzv. logistické rovnice a grafem v oblasti přechodu od limitního cyklu s periodou „jedna“, k rozvinuté stochastičnosti.

Logistická rovnice (obr. 13.11, 13.12) je příkladem jednodimen-  
 zionálního neinvertovatelného (jednoznačného a spojitého) zobrazení  $x_{n+1} =$   
 $= F(x_n, \mu)$ .  $n=0, 1, 2, \dots$  intervalu  $0 \leq x \leq 1$  do sebe;  $\mu$  je parametr. Pone-  
 cháme-li u  $F(x)$  toliko kvadratickou část, docházíme k rovnici  $x_{n+1} =$   
 $= \mu x_n(1 - x_n)$ , o níž je známo, že popisuje například evoluci dynamického  
 biologického systému. Při zdvojování period řešení se vyšetřují všechna  
 periodická řešení s periodou  $p=2^m$ ,  $m=0, 1, 2, \dots$  (nebo s periodou  $q$ , která  
 dělí  $p$ ). Po jistých úpravách této rovnice docházíme k velmi zajímavému  
 výsledku, který ukazuje, že díky novým spojením jsou dnes oblasti, které, ač  
 viděné jako zcela oddělené, součástí jednoho celku. Jde o souvislost Fer-  
 matových čísel s matematickou teorií chaosu. Uvědomme si, že geome-  
 trickým obrazem chaosu v logistické rovnici je aperiodický atraktor, invari-  
 antní přitahující množina, chápaná jako periodická orbita s periodou  $2^\infty$ .



Obr. 13.11 K logistické rovnici.

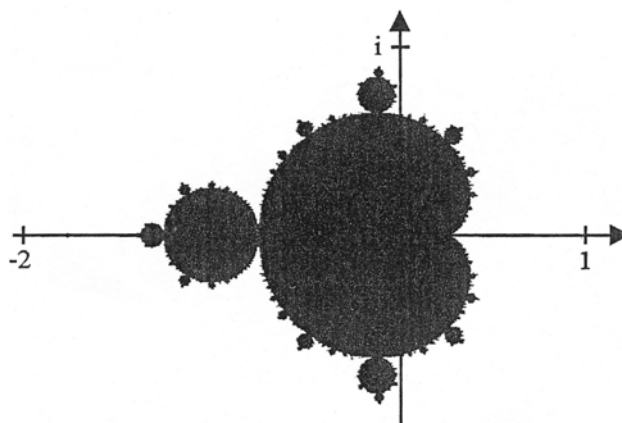


Obr. 13.12 K logistické rovnici.

Fermatova čísla jsou všechna čísla tvaru  $F_m = 2^{2^m} + 1$  pro  $m = 0, 1, 2, \dots$   
 Exponent v logistické rovnici lze napsat jako součin Fermatových čísel  
 a proto lze rozložit polynom na levé straně této rovnice na ireducibilní

cyklotomické polynomy nižšího řádu. Protože existuje jednoznačný vztah mezi bifurkačními větvemi a cyklotomickými polynomy, souvislost mezi teorií čísel a teorií chaosu je zřejmá.

Do stejného okruhu myšlenek spojených s úlohou Fermatových čísel v chaotické dynamice náleží poznatek, že některé fraktální objekty v komplexní rovině jsou popsány pomocí stejné rovnice jako chaos v reálné proměnné. Pak ovšem stojí za povšimnutí skutečnost, že množina všech komplexních čísel  $\lambda$ , pro něž posloupnost  $x_1(\lambda) = 0, x_2(\lambda), x_3(\lambda), \dots$ , definovaná vztahem  $x_{n+1} = x_n^2 + \lambda$ , kde  $\lambda = \mu/2 - \mu^2/4$ , je ohraničená. Tvoří ji Mandelbrotova množina známá z fraktální geometrie:  $M = \{\lambda \in C \mid \exists c > 0 \forall n \in \{1, 2, \dots\} : |x_n(\lambda)| \leq c\}$ , kde  $C$  je komplexní rovina (obr. 13.13).



Obr. 13.13 Mandelbrotova množina.

Chceme-li zcela na závěr vyzvednout úlohu nelineární analýzy v hydrodynamice (typickým příkladem je zkoumání Navierovy-Stokesovy rovnice pro proudění kapalin) a v geofyzikální hydrodynamice (jmenujme zde rovnici vorticity na rotující ploše kulové), neznamená to, že se všechny otázky týkající se mechaniky tekutiny budou řešit aplikací metod nelineární mechaniky. Stále zůstávají úlohy, které se řeší a budou se řešit užitím lineárních tečných prostorů. Dokladem toho je první část knihy věnovaná hydrodynamické nestabilitě.



## LITERATURA K ČÁSTI II

- [1] Horák J. Krlín L.: Deterministický chaos a matematické modely turbulence. Academia, Praha 1996.
- [2] Nečas J.: Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 35 (1990), 250.
- [3] Lee T. D.: Quart. Appl. Math. 10 (1952), 69.
- [4] Litzman O., Sekanina M.: Užití grup ve fyzice. Academia, Praha 1982.
- [5] Dolžanskij F. V., Kljackin V. I., Obuchov A. M., Čusov A. M.: Nelinejnye sistemy gidrodinamičeskogo tipa. Nauka, Moskva 1974.
- [6] Gledzer E. B., Dolžanskij F. V., Obuchov A. M.: Sistemy gidrodinamičeskogo tipa i ich primenenie. Nauka, Moskva 1981.
- [7] Horák J.: Systems of the Fluid Mechanical Type: Applications and Connections. Academia, Praha 1990.
- [8] Monin A. S., Jaglom A. M.: Statističeskaja gidromechanika 2. Nauka, Moskva 1967.
- [9] Halmos P.: Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 36 (1991), 305.
- [10] Volterra V.: Gathier - Villars, Paris 1931.
- [11] Gustavson F.: Astr. Jour. 71 (1966), 670.
- [12] Hénon M., Heiles C.: Astr. Jour. 69 (1964), 73.
- [13] Kolář I.: Úvod do Thomovy teorie katastrof. Academia, Praha 1988.
- [14] Arnold V. I.: Matematické metody klassičeskoj mechaniki. Nauka, Moskva 1979.
- [15] Hlavatý L.: Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 34 (1989), 233.
- [16] Richtmyer R. D.: Principles of Advanced Mathematical Physics. Vol. 2, Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin 1981.
- [17] Whitehead J. H. C.: Quart. Jour. Math. 3 (1932), 33.
- [18] Dymnikov V. P.: Fyzika atm. i okeana 37 (2001), 459.
- [19] Viščík V. P., Fursikov A. V.: Matematické zadání statističeskoj gidromechaniki. Nauka, Moskva 1980.
- [20] Fursikov A. V.: Dokl. Akad. Nauk SSSR 319 (1991), 83.
- [21] Dolžanskij F. V.: Fyzika atm. i okeana 37 (2001), 446.
- [22] Dolžanskij F. V., Ponomarev V. M.: Fyzika atm. i okeana 38 (2002), 316.
- [23] Brdička M., Samek L., Sopko B.: Mechanika kontinua. Academia, Praha 2000.
- [24] Obdržálek J.: Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 42 (1997), 234.
- [25] Kohout V.: Diferenciální geometrie. SNTL, Praha 1971.
- [26] Dymnikov V. P., Gricun A. S.: Fyzika atm. i okeana 37 (2001), 291.
- [27] Kornfeld I. P., Sinaj Ja. G., Fomin S. V.: Ergodičeskaja teorija. Nauka, Moskva 1980.

- [28] Vinogradov A. M., Kuperšmid V. I.: Usp. matem. nauk 4 (1977), 175.
- [29] Gabov C. A., Svešnikov A. G.: Matematičeskie zadači dinamiki stratificirovannoj židkosti. In: Samarskij A. A., Kurdjumov S. P., Galaktinov V. A. (eds): Matematičeskoe modelirovanie. Processy v nelinejnyh sredach. Nauka, Moskva 1986.
- [30] Katětov M., Jedlička P.: Pokroky matematiky, fyziky a astronomie XXIV (1979), 1.